بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه نجوم کروی

فصول ۲، ۵، ۶ و ۸

فصل ۲

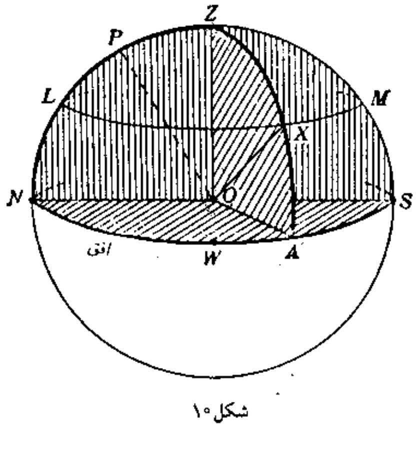
کرهٔ سماوی

۱۷. مقدمه

در فصل ۱ دیدیم که مکان در روی سطح زمین به کمک دو دایرهٔ عظیمهٔ اصلی، نصف النهار گرینویچ و خط استوا به طور کامل مشخص می‌شود قاعدهٔ کلی برای تعیین مکان روی کرهٔ سماوی نیز اساساً همین است و بسته به دایره‌های عظیمهٔ خاصی که به عنوان دایره‌های اصلی انتخاب می‌شوند چندین روش وجود دارد اکنون به توصیف این روش‌ها می‌پردازیم.

۱۸. ارتفاع و سمت

فرض کنید O که مکان راصد بر روی زمین (کروی) است مرکز کرهٔ سماوی است (شکل ۱۰). همچنین فرض کنید Z (سمت الرأس) نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی باشد که به طور قائم بالای سر راصد است. جهت این نقطه را می‌توان به کمک خط شاغولی تعریف کرد، بدین ترتیب که OZ ادامهٔ این خط راست است که مرکز زمین را به نقطهٔ O وصل می‌کند. صفحه‌ای که از O می‌گذرد و بر OZ عمود است صفحهٔ افق است. این صفحه کرهٔ سماوی را در دایرهٔ عظیمهٔ NAS که افق سماوی یا افق خوانده می‌شود، قطع می‌کند. بدین ترتیب افق، در شکل ۱۰، کرهٔ سماوی را به دو نیمکره تقسیم می‌کند که نیمکرهٔ بالایی مرئی است و نمیکرهٔ پائینی به وسیلهٔ زمین از دید راصد پنهان می‌شود فرض کنید در لحظه‌ای معین، X مکان ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی باشد. هر دایرهٔ عظیمه‌ای که از



شکل ۱۰

Z رسم شود دایرهٔ قائم خوانده می‌شود در شکل دایرهٔ قائمی که از X می‌گذرد ZXA است. در صفحهٔ ZXA، زاویهٔ AOX یا کمان AX از دایرهٔ عظیمه را ارتفاع X می‌نامیم و با a نشان می‌دهیم. چون OZ بر صفحهٔ افق عمود است، یعنی کمان دایرهٔ عظیمهٔ ZA برابر 90° است، داریم $ZX = 90^\circ - a$ کمان ZX فاصلهٔ سمت الرأسی (ZD) ستارهٔ X خوانده می‌شود و با z نشان داده می‌شود. پس داریم

$$z = 90^\circ - a \tag{1}$$

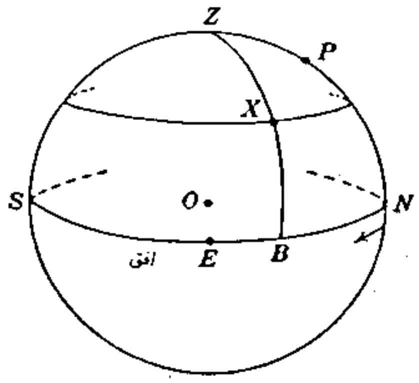
فرض کنید LXM دایرهٔ صغیره‌ای باشد که از X موازی افق می‌گذرد. این دایره موازی ارتفاع خوانده می‌شود و طوری است که همهٔ اجرام آسمانیی که مکان آن‌ها در لحظه‌ای معین روی این دایرهٔ صغیره است یک ارتفاع دارند و نیز، مطابق رابطهٔ (۱)، فاصلهٔ سمت الرأسی آن‌ها با فاصلهٔ سمت الرأسی X برابر است. بدین ترتیب اگر ارتفاع یا فاصلهٔ سمت الرأسی ستاره‌ای در دست باشد، می‌توان موازی ارتفاعی را که ستاره باید روی آن قرار گیرد به طور قطع مشخص کرد. برای تعیین کامل مکان این ستاره روی کرهٔ سماوی، باید دایره قائم خاصی که ستاره روی آن قرار دارد نیز مشخص شود. این کار به شرح زیر انجام می شود.

فرض کنید OP موازی محوری باشد که زمین گرد آن می‌چرخد. اگر عرض جغرافیایی راصد، شمالی باشد (شکل ۱۰) مکان P، قطب شمال سماوی یا تنها قطب شمال نامیده می‌شود. ما چرخش زمین را به طور مستقیم حس نمی‌کنیم، بلکه اثر آن در چرخش ظاهری کرهٔ سماوی نمایان می‌شود. بدین ترتیب چنین به نظر می‌رسد که ستاره‌ها در آسمان حرکت می‌کنند و ارتفاع و جهت آن‌ها پیوسته در تغییر است. با این حال در نیمکرهٔ شمالی ستاره‌ای هست که با چشم غیر مسلح مرئی به نظر می‌رسد و مکان آن خیلی کم تغییر می‌کند. این ستاره جدّی یا ستارهٔ قطبی نام دارد و جهت آن در آسمان خیلی نزدیک به جهت OP است. اگر ستاره‌ای درست در نقطهٔ P رویکرهٔ سماوی بود، ارتفاع و جهت آن در طول شب تغییر نمی‌کرد. دایرهٔ قائمی که از نقطهٔ P یعنی از ZPN (که افق را در نقطهٔ N قطع می‌کند) می‌گذرد دایرهٔ قائم اصلی، و نقطهٔ N نقطهٔ شمال افق تعریف می‌شود. نقطهٔ S که روی افق و درست روبه روی نقطهٔ N است به نقطهٔ جنوب موسوم است؛ جهت نقطهٔ غرب (W) و نقطهٔ شرق (E) به ترتیب بر جهت‌های N وS عمودند (نقطهٔ E در شکل ۱۰ نشان داده نشده است).[1] نقطه‌های N، E، S، و W چهار جهت اصلی نامیده می‌شوند.

[1]– مکان نقطه‌های W, و E نسبت به N وS را به صورت زیر به دست می‌آوریم. اگر راصدی رو به شمال بایستد، نقطهٔ غرب به طرف دست چپ و نقطهٔ شرق به طرف دست راست اوست.

اکنون مکان ستارهٔ X روی کرهٔ سماوی را در لحظه‌ای معین نسبت به افق و دایرهٔ قائم اصلی ZPN مشخص می‌کنیم. اگر ستاره در بخش غربی کرهٔ سماوی باشد (شکل ۱۰)، زاویهٔ کروی PZX (که به وسیلهٔ دایرهٔ قائم اصلی و دایرهٔ قائم گذرنده از X ایجاد می‌شود) یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NA را سمت غربی می‌نامند. اگر ستاره، مانند شکل ۱۱ در بخش شرقی کرهٔ سماوی باشد زاویهٔ PZX یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NB سمت (شرقی) خوانده می‌شود. بدین ترتیب مکان یک جرم آسمانی را روی کرهٔ سماوی می‌توان در هر لحظه نسبت به افق و نقطهٔ شمال افق، برحسب ارتفاع و سمت (شرقی یا غربی) یا بر حسب فاصلهٔ سمت الرأسی و سمت به طور کامل مشخص کرد. وقتی سمت ۹۰° شرقی یا ۹۰° غربی باشد. گفته می شود ستاره روی قائم مبدأ است پس قائم مبدأ دایره قائمی است که از نقطه شرق (E) یا نقطه غرب (W) می‌گذرد.

چون در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ زاویهٔ POZ (یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ PZ) با زاویه‌ای که شعاع زمین



شکل۱۱

در مکان راصد و محور زمین با هم می‌سازند معادل است، POZ (یا PZ) با متمم عرض راصد برابر است

$$PZ = ۹۰^\circ - \phi \qquad (۲)$$

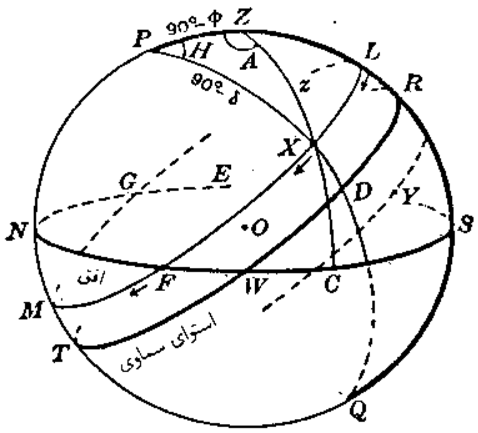
که در آن ϕ عرض جغرافیایی راصد است. همچنین داریم $PN = ۹۰^\circ - PZ = \phi$؛ از این رو ارتفاع قطب با عرض جغرافیایی راصد برابر است.

۱۹. میل و زاویه‌ی ساعتی

همانند بخش قبل فرض کنید که کره‌ی سماوی برای راصد O در عرض جغرافیایی ϕ رسم می‌شود و در آن صفحه‌ی افق، سمت الرأس Z و قطب شمال P نمایش داده شود (شکل ۱۲). دایره‌ی عظیمهٔ RWT که صفحه‌ی آن عمود بر OP است استوای سماوی است و صفحه‌ی آن آشکارا موازی صفحه‌ی استوای زمین است. استوای سماوی و افق همدیگر را در دو

نقطه‌ی W, E قطع می‌کنند. چون Z قطب دایره‌ی عظیمه‌ی NWS و P قطب دایرهٔ عظیمه RWT است، W از هر دو نقطـهٔ Z و P به اندازه ۹۰ فصله دارد و بنابراین فاصله آن از همه نقاط دایره عظیمهای کـه از Z و P مـی گـذرد ۹۰ اسـت . بـه گفتـهٔ دیگر، W قطب دایرهٔ عظیمهٔ NPZSQ است و از این رو داریـم $NW=90^\circ$ و $WS=90^\circ$. بـه همـین ترتیـب $EN=90^\circ$ و $ES=90^\circ$ است. بنابراین W و E دو جهت دیگر از چهار جهت اصلی‌اند که جهات N و S آن قبلاً تعریف شده بود.

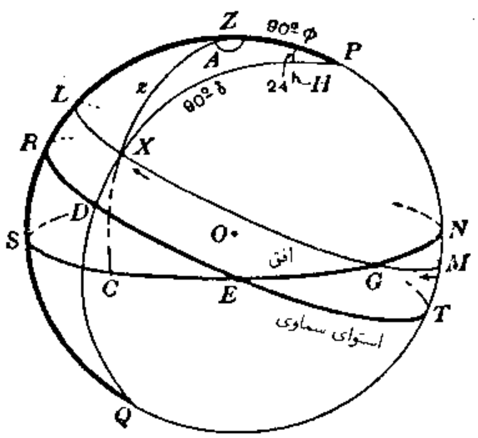
چنانکه بیش از این هم گفته شد چرخش زمین موجب چرخش ظاهری کرهٔ سماوی، به گرد OP، از شرق به غرب می‌شـود. چون ستاره‌ها در فاصله‌هایی بسیار دور از زمین قرار دارند در نتیجه



شکل۱۲

نتیجه زاویهٔ میان خط راست و اصل بین راصد O و هر ستارهٔ ویژه و خط راست OP (موازی محور زمین) بدون تغییـر مـی ماند. اگر به ستاره‌ای مانند X نگاه کنیم، به خاطر چرخش زمین، به نظر می رسد که این ستاره دایرهٔ صـغیرهٔ LXM را مـوازی استوای سماوی در جهتی که در شکل ۱۲ با پیکان نشان داده شده است طی می کند. فرض کنید PXDQ نیم دایرهٔ عظیمه ای باشد که از X و قطب های کرهٔ سماوی می گذرد. در این صورت، کمان DX را میل ستاره می نامند. اگر سـتاره ای (مـثلاً X) بین استوای سماوی و قطب شمال P باشد میل آن، میل شمالی و اگر (مثل Y) بین استوای سماوی و قطب جنـوب Q باشـد میل آن را میل جنوبی می نامند. بدین ترتیب میل یک ستاره به عرض جغرافیایی یک نقطـه روی زمـین مـی مانـد کـه قـبلاً تعریف شد. میل X را با δ را نشان می دهیم، در این صورت داریم $DX=\delta$ و $PX=90^\circ-\delta$ است. PX فاصلهٔ قطبـی شـمالی (NPD) ستاره است. بهتر است میل را یک کمیت جبری تلقی کنیم تا فرمول های گوناگونی که به دست می آوریم در مـورد میلهای شمالی و جنوبی به طور یکسان صادق باشند. میل های شمالی دارای علامت مثبـت (+) و میـل هـای جنـوبی دارای علامت منفی (−) هستند بدین ترتیب، فرمول فاصلهٔ قطبی شمالی، یعنی $NPD=90^\circ-\delta$، در مورد همهٔ ستاره ها، با هر میلـی، صادق است.

با دانستن میل ستاره می توانیم دایرهٔ صغیره ای به نام مدار سماوی را که ستاره باید روی آن باشد مشخص کنیم. برای تعیین کامل مکان ستاره در هر لحظه روی کرهٔ سماوی به دایرهٔ عظیمهٔ دیگری به عنوان مرجع نیاز داریم. این نیاز را نیم دایرهٔ عظیمهٔ PZRSQ که دایرهٔ نصف النهار راصد خوانده می شود بر طرف می کند. هنگامی که ستاره در نقطهٔ L روی نصف النهار راصد است، می گوییم که ستاره عبور می کند و از روی شکل ۱۲ آشکار است که در این صورت ارتفاع ستاره، (یعنی SL) بیشترین و فاصلهٔ سمت الرأسی آن، یعنی ZL، کمترین مقدار است. از این پس ستاره، به سبب چرخش زمین، درطول دایرهٔ صغیرهٔ LFM حرکت می کند و افق را در نقطهٔ F قطع می کند. در این حالت می گوییم که ستاره در این نقطه غروب می کند. بی شک ارتفاع ستاره در نقطه F ، صفر درجه و فاصلهٔ سمت الرأسی آن˚۹۰ است. ستاره در مدتی که بستگی به میل آن دارد زیر افق می ماند و در M بیشترین انخفاص را در زیر افق خواهد داشت، و سر انجام در نقطهٔ G دوباره به افق می رسد و می گوییم که طلوع می کند. ارتفاع ستاره رفته رفته افزایش می یابد و ستاره پس از مدتی، که معادل زمان یک چرخش کامل زمین حول محور خود است، به نصف النهار راصد در نقطهٔ L باز می گردد. در هر لحظه مکان ستاره روی مدار سماوی با زاویه ای در P بین دایرهٔ نصف النهار راصد و نصف النهار (PXQ) که در همان لحظه از ستاره می گذرد مشخص می شود این زاویه، یعنی RPX یا ZPX یا کمان RD روی استوا، با H نشان داده می شود و زاویهٔ ساعتی نام دارد و از دایرهٔ نصف النهار راصد به طرف غرب از˚۰ (در L) تا˚۳٦۰ (هنگامی که ستاره به نصف النهار راصد باز می گردد) یا 0^h تا 24^h اندازه گیری می شود. این را می توانیم به روش نسبتاً متفاوتی بیان کنیم. هنگامی که ستاره در حال عبور است، دایرهٔ نصف النهار آن بر دایرهٔ نصف النهار راصد منطبق است؛ از آن پس، دایرهٔ نصف النهار ستاره به طور یکنواخت به طرف



شکل۱۳

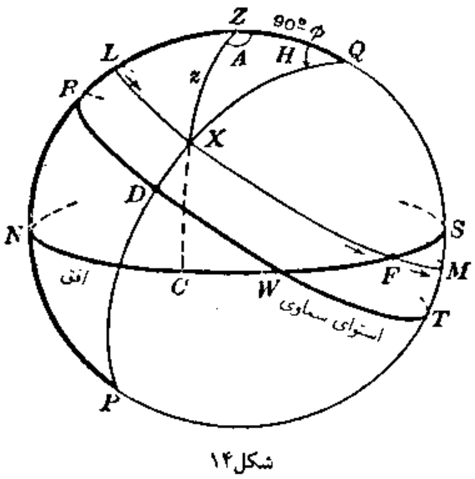
غرب حرکت می‌کند و وقتی یک دور کامل از کره‌ی سماوی را به پایان رسانید یک زاویه ۳٦۰ یا 24^hرا نسبت به دایره‌ی نصف النهار راصد پیموده است. از شکل ۱۲ دیده می‌شود که اگر ستاره در غرب دایره‌ی نصف النهار راصد باشد، یعنی اگر سمت آن غربی باشد، زاویه ساعتی آن بین 0° و 180° یا بین 0^h و 24^h خواهد بود. همین طور اگر (مانند شکل ۱۳) ستاره

در شرق دایره نصف النهار (در سمت شرقی) باشد زاویه ی ساعتی آن بین ۱۲h و 24^h خواهد بود. بدین ترتیب قاعده های زیر را بیان کنیم.

اگر سمت ستاره غربی باشد زاویه‌ی ساعتی آن بین 0^h و 24^h خواهد بود (و برعکس)، اگر سمت ستاره شرقی باشد زاویه‌ی ساعتی آن بین 12^h و 24^h است.

۲۰. نمودار مربوط به نیمکرهٔ جنوبی

نمودارهایی که تاکنون در این فصل شرح دادیم به کرهٔ سماوی راصدی که در عرض شمالی بود مربوط می شدند. اکنون این نمودارها را برای راصدی که در نیمکرهٔ جنوبی است توضیح می دهیم. در شکل ١٤محل سمت الرأسی راصد را مانند نمودارهای پیشین انتخاب می‌کنیم. در این صورت افق سماوی به ترتیبی است که نشان داده شده است. قطب جنوب سماوی، Q، و در نیم کرهٔ جنوبی بالای افق است. پس اگر ϕنمایندهٔ عرض جغرافیایی جنوبی راصد باشد، داریم $QZ=90^\circ-\phi$. در این حال دایرهٔ قائم اصلی ZQS است که افق را در نقطهٔ جنوب، S، قطع می کند. پس نقطهٔ شمال، N، را نیز می توان در این نمودار مشخص کرد. استوای سماوی و افق، مطابق قاعده ای که در پانوشت صفحهٔ ٣٦ آمد یکدیگر را در نقاط غرب و شرق،W و E



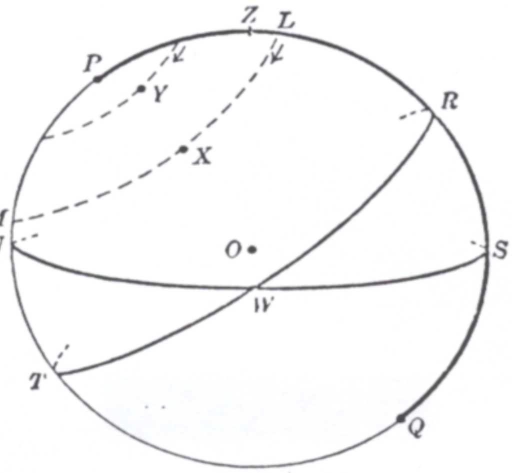
شکل۱۴

(نقطهٔ E در شکل ١٤ نشان داده نشده است) قطع می کنند. ستارهٔ X را با میل جنوبی در نظر می گیریم. این ستاره، به سبب چرخش زمین، دایرهٔ صغیرهٔ LXM که بین استوای سماوی و قطب جنوب Q قرار دارد را موازی استوای سماوی طی خواهد کرد. در نقطهٔ L، ستاره بزرگترین ارتفاع را دارد و بنابراین روی نصف النهار راصد که نیم دایرهٔ QZRNP است قرار دارد. ستاره در نتیجهٔ چرخش زمین، به طوری که در شکل با پیکان نشان داده شده است، از نصف النهار راصد به طرف غرب، یعنی در جهت LXM، حرکت خواهد کرد. زاویهٔ ZQX زاویهٔ ساعتی ستاره است که مانند قبل، از نصف النهار راصد به طرف

غرب از 0^h و 24^h اندازه گیری می شود. زاویهٔ QZX سمت ستاره است که در این مثال غربی است. اگر δ میل (منفی) ستاره باشد، آن وقت $DX=-\delta$ و $QX=۹۰°+\delta$. اجزای دیگر مثلث کروی QZX عبارت اند از: $QZ=۹۰°-\phi$ و $ZX=z$ (فاصلهٔ سمت الرأسی)، $QZX=A$ (سمت) و $ZQX=H$ (زاویهٔ ساعتی). هنگامی که سمت ستاره غربی است، زاویه ساعتی بین زاویهٔ 0^h و ۱۲^h است . نمودار حالتی که در آن سمت ستاره شرقی است را به روشی مشابه می توان رسم کرد. این موضوع به عنوان تمرینی به دانشجو محول می شود، با رسم این نمدار مشخص خواهد شد که ساعتی بین ۱۲^h و ۲٤^h است. معلوم می شود که قاعده های یاد شده در پایان بخش ۱۹ هم برای عرض های جنوبی صادق اند هم برای عرض های شمالی.

۲۱. ستاره های پیرا قطبی

کرهٔ سماوی را برای راصدی در عرض جغرافیایی شمالی ϕدر نطر می گیریم (شکل ۱۵). در شکل ۱۵ مدارهای سماوی دو ستارهٔ X و Y، که هر دو همواره بالای افق اند و در نتیجه غروب نمی کنند، رسم



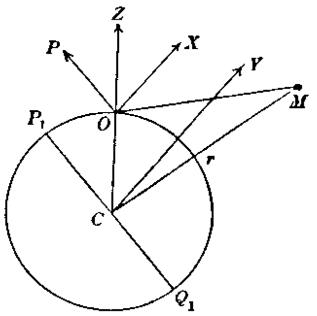
شکل۱۵

شده اند. چنین ستاره هایی را ستاره های پیرا قطبی می نامند. از شکل ۱۵ به سهولت می توان دید که شرط این که ستاره ای غروب نکند این است که PM از PN کوچکتر باشد؛ یعنی فاصلهٔ قطبی شمالی باید از عرض جغرافیایی کمتر، یا به عبارت دیگر، میل باید از متمم عرض بزرگتر باشد. هنگامی که ستارهٔ X روی نصف النهار راصد در L قرار دارد، در عبور بالاست؛زمانی که ستاره به M می رسد، در عبور پایین است. اغلب عبارت های «عبور بالای قطب» و «عبور پایین قطب» به کار برده می شوند. فاصلهٔ سمت الرأسی ستاره در عبور بالا برابر ZL یا (PL−PZ)، یعنی برابر $\delta-\phi$است. فاصلهٔ سمت

الرأسی ستاره در عبور پایین برابر ZM یا (ZP+PM)، یعنی برابر $180^\circ-(\phi+\delta)$ است. هنگامی که $\delta=\phi$ است، عبور بالا در سمت الرأس روی می دهد. وقتی $\delta-\phi$ باشد عبور بالای یک ستاره، نظیر ستارۀ Y، بین P و Z روی مـی دهـد و در ایـن صورت، به طوری که می توان به آسانی از نمودار نتیجه گرفت، سمت ستاره نمی تواند بیشتر از ۹۰° باشد. سـتاره هـای پیـرا قطبی جنوبی را می توان به همین روش بررسی کرد.

۲۲. کرۀ سماوی استاندارد یا زمین- مرکز

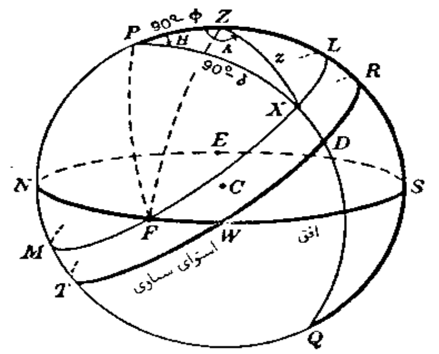
در بخش های قبل، میل یک ستاره روی کرۀ سماوی را که مرکز آن راصد است تعریف کـردیم. چـون فاصـلۀ سـتاره‌هـا در مقایسه با ابعاد زمین تقریباً بینهایت بزرگ است، بنابر تعریف پیش گفته و به طوری که به سهولت از شکل ١٦ دیده می شود، میل یا فاصلۀ قطبی ستاره مستقل از مکان راصد روی زمین است. (برای این منظور بهتر است به جای میل ستاره فاصلۀ قطبی آن را در نظر بگیریم).



شکل۱۶

در شکل ١٦، P_1CQ_1 محور چرخش، C مرکز زمین، O مکان راصد، و COZ جهت سمت الرأسی در O است؛ OP بـا CP_1 موازی است و OX جهت ستاره‌ای است که درO در حال عبور است. طبق تعریف، فاصلۀ قطبی شمالی ستاره برای راصـدی در O، $P\hat{O}X$ است. اگر CY به موازات OX رسم شود، آن وقت CY جهت ستاره نسبت به مرکز زمین یعنی C است. در این صورت $P_1\hat{C}X=P\hat{O}X$؛ به عبارت دیگر، فاصلۀ قطبی شمالی ستاره (و در نتیجه میل آن) روی کرۀ سماوی بـه مرکـز O (یا هر مکان دیگری در روی زمین) با مقدار آن روی کرۀ سماوی به مرکز C یکی است. اما هنگامی که جـرم آسـمانی نسـبتاً نزدیکی مانند ماه، خورشید، یا یک سیاره رصد می‌شود، تعریف فاصلۀ قطبی شمالی (و بنابراین میل) که قبلاً داده شده اسـت به مکان ویژه راصد روی زمین بستگی دارد. بدین ترتیب اگر M نشان دهندۀ ماه در فاصلۀ r از مرکز زمین باشد (شکل ١٦)،

بدیهی است که $P\hat{O}M = P_1\hat{C}M + O\hat{M}C$؛ و نیز $O\hat{M}C$ به مکان O بستگی دارد، در حالی که P_1CM اصلاً به O بستگی ندارد. $P_1\hat{C}M$ که زاویهٔ بین محور زمین و خطر راست و اصل بین مرکز زمین و جرم آسمانی است به عنوان فاصلهٔ قطبی شمالی M تعریف می‌شود. این تعریف کاملاً کلی است و در مورد همهٔ اجرام آسمانی به کار می‌رود. مرکز کرهٔ سماوی استاندارد (یا کرهٔ سماوی زمین–مرکز) در نقطهٔ C، یعنی مرکز زمین انتخاب می‌شود (شکل ۱۷). CZ جهت سمت الرأسی راصد و قطر QCP بر محور زمین منطبق است. NWSE افق سماوی (دایرهٔ عظیمه‌ای که صفحهٔ آن بر CZ عمود است) و RWTE استوای سماوی (که صفحهٔ آن بر صفحهٔ استوای زمین منطبق) است. کمان PX، طبق تعریفی که در بالا داده شد، فاصلهٔ قطبی شمالی جرم آسمانی و DX میل δی آن $(NPD = 90^\circ - \delta)$است. چنان که قبلاً تعریف شد PZRSQ دایرهٔ نصف النهار راصد، ZX (که با z نشان داده می‌شود) فاصلهٔ سمت الرأسی جرم آسمانی، $A(P\hat{Z}X)$سمت، و $H(Z\hat{P}X)$ زاویهٔ ساعتی آن است.[1]



شکل ۱۷

از این پس فرض می‌کنیم که مرکز کرهٔ سماوی، نقطهٔ C یعنی مرکز زمین است (شکل ۱۷).

۲۳. حل مثلث کروی PZX

دو مسئلهٔ کلی را در ارتباط با مثلث کروی PZX در نظر می‌گیریم.

الف) عرض جغرافیایی ϕ راصد و میل δ و زاویهٔ ساعتی H جرم آسمانی معلوم اند، فاصلهٔ سمت الرأسی و سمت آن را تعیین کنید.

[1]. میل اجرام اصلي آسمان (ماه، خورشيد، سيارات، و ستاره هاي درخشان) در زيج نجومي که يک نشرية آمريکايي- بريتانيايي است و در زيج هاي کشور هاي ديگر، فهرست مي شود.

چون دو ضلع PZ و PX و زاویهٔ بین آن‌ها یعنی ZPX معلوم اند (شکل ۱۷)، از فرمول (الف) داریم

$$\cos ZX = \cos PZ \cos PX + \sin PZ \sin PX \cos ZPX$$

یا

$$losz = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H \qquad (۳)$$

بدین ترتیب مقدار z را می‌توان مستقیماً از رابطهٔ (۳) یا از فرمول هاورسینوس (بخش ۱۳) که در این حالت به صورت زیر نوشته می‌شود، محاسبه کرد.

$$havz = hav(\phi - \delta) + \cos\phi \cos\delta hav H \qquad (٤)$$

باز هم از فرمول (الف)، داریم

$$\cos PX = \cos PZ \cos ZX + \sin PZ \sin ZX \cos PZX$$

یا

$$\sin\delta = \sin\phi \cos z + \cos\phi \sin z \cos A \qquad (۵)$$

که از آن می‌توان سمت A را محاسبه کرد. رابطهٔ (۵) را می‌شود به صورت هاورسینوس نوشت

$$\cos\phi \cos a \, havA = hav(۹۰^\circ - \delta) - hav(\phi - a) \qquad (٦)$$

که در آن a ارتفاع است.

ب) عرض جغرافیایی ϕراصد، فاصلهٔ سمت الرأسی ستاره و سمت آن معلوم اند، زاویهٔ ساعتی و میل ستاره را تعیین کنید.

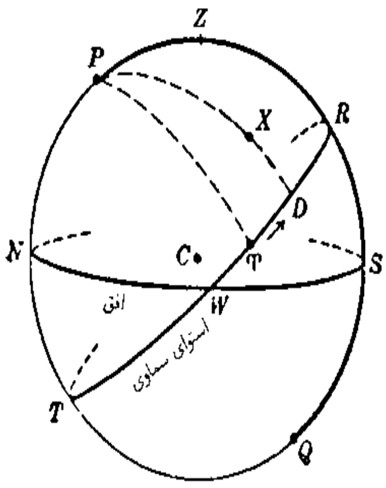
چون مقادیر ϕ، z، و A داده شده اند، از رابطهٔ (۵) می‌توانیم میل را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی، H، از یکی از معادلات (۳) و (٤) استفاده می‌کنیم. از این رو، از رابطهٔ (۳) داریم

$$\cos H = \cos z \sec\phi \sec\delta - \tan\phi \tan\delta \qquad (۷)$$

اکنون مثلث کروی PZX را در شکل ۱۳ در نظر می‌گیریم. زاویهٔ PZX سمت (شرقی) ستاره است. با توجه به اینکه زاویهٔ ساعتی، در قطب، از دایرهٔ نصف النهار راصد به طرف غرب اندازه گیری می‌شود، می‌بینم که $Z\hat{P}X = 24^h - H$. مثلث را مانند قبل حل می‌کنیم.

۲٤. بُعد و میل

در تعیین مکان یک ستاره روی کرهٔ سماوی به روش زاویهٔ ساعتی و میل، فقط یک مختصه یعنی میل با حرکت ستاره در آسمان ثابت می‌ماند، در حالی که زاویهٔ ساعتی به طور یکنواخت از 0^h به 24^h افزایش می‌یابد. اما مکان ستاره‌ها روی کرهٔ سماوی را می‌توان به مکان نقاط ثابت روی سطح زمین تشبیه کرد و بنابراین مکان آن‌ها را می‌توان نسبت به استوای سماوی و ستارهٔ ویژه‌ای روی استوا مشخص کرد. به عنوان مثال، فرض کنید در شکل ۱۸ γ یک ستارهٔ استوایی و x ستارهٔ دیگری باشد؛ فرض کنید دایرهٔ نصف النهاری که از x می‌گذرد استوای سماوی را در D قطع کند. می‌دانیم با تغییر مکان ستاره‌ها در آسمان، میل X، یعنی DX ثابت می‌ماند و در پیکربندی آن‌ها نیز تغییری روی نمی‌دهد. بنابراین γD ثابت است. به عبارت دیگر زاویهٔ بین نصف النهاری γ و D ثابت می‌ماند. پس می‌توان نقطهٔ γ را به عنوان یک نقطهٔ مرجع روی استوای سماوی اختیار کرد. در این حالت، مکان ستارهٔ X را می‌توانیم نسبت به γ و استوای سماوی با کمان دایرهٔ عظیمه‌ای



شکل۱۸

γD و میل DX به روشنی مشخص کنیم. نقطهٔ مرجعی که در عمل انتخاب می‌شود موسوم به اعتدال بهاری یا نقطهٔ اول حمل است و فرض اینکه مکان نقطهٔ γ به وسیلهٔ ستارهٔ ویژه‌ای در آسمان مشخص شود یک فرض مفید است. بعداً نقطهٔ γ را با دقت بیشتری تعریف خواهیم کرد. کمان γD یا زاویهٔ $\widehat{\gamma p x}$ بُعد (RA) ستارهٔ X (که با a نشان داده می‌شود) خوانده می‌شود و از نقطهٔ γ به طرف شرق از 0^h تا 24^h (در جهت پیکان نزدیک γ) اندازه گیری می‌شود. این خلاف جهتی است که در

آن زاویهٔ ساعتی اندازه گیری می‌شود. از شکل ۱۸ می‌بینیم که $R\gamma = RD + \gamma D$. در این شکل RD (یا $R\hat{P}X$) زاویهٔ ساعتی ستارهٔ X، یعنی H، و $R\gamma$ زاویهٔ ساعتی γ است. زاویهٔ ساعتی γ را زمان نجومی (ST) می‌نامند. بنابراین داریم

$$ST=HAX+RAX$$

یا

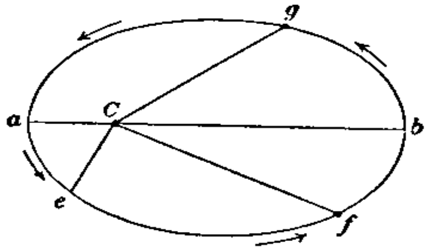
$$ST=H+\alpha$$

هنگامی که γ روی دایرهٔ نصف النهار راصد است، زاویهٔ ساعتی γ برابر 0^h، یعنی زمان نجومی 0^h است. وقتی γ دوباره روی نصف النهار راصد قرار می‌گیرد، زمانی برابر 24^h ساعت زمان نجومی سپری شده است. البته این بازه زمانی برابر همان مدت زمانی است که برای یک چرخش کامل زمین حول محورش لازم است و یک روز نجومی خوانده می‌شود. در واقع زمین چرخان یک زمان شمار استاندارد است.

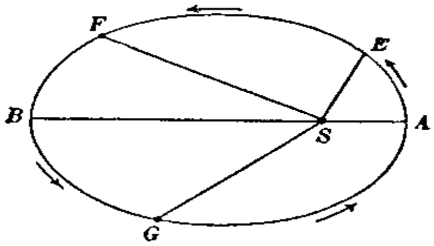
۲۵. مدار زمین

زمین سیاره‌ای است که روی یک مسیر یا مدار بیضی به دور خورشید می‌گردد و خورشید در یک کانون بیضی، S، واقع است (شکل ۱۹). این قانون اول حرکت سیاره‌ای کپلر است. زمان لازم برای یک گردش کامل زمین بر روی مدارش یک سال است. با پیشروی زمین در مدارش، جهت آن از دیدگاه خورشید پیوسته تغییر می‌کند، لیکن سرعت زاویه‌ای آن یکنواخت نیست. چون رصدهای ما از زمین انجام می‌گیرد به نظر می‌رسد که خورشید، نسبت به زمین و حول آن یک مدار بیضی طی می‌کند. در شکل ۲۰ نقطهٔ C مرکز زمین، و مسیر بیضی مدار ظاهری خورشید را نسبت به زمین نشان می‌دهد. رشته مکان‌های خورشید در این مدار، یعنی g, b, f, e, a نظیر رشته مکان‌های زمین در مدارش به دور خورشید، یعنی G, B, F, E, A هستند (شکل ۱۹). بدین ترتیب به نظر می‌رسد که خورشید در طول یک سال مدار کاملی را در آسمان نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها طی می‌کند. صفحهٔ این مدار را صفحهٔ دایرهٔ البروج می‌نامند و دایره عظیمه‌ای که از برخورد این صفحه با کرهٔ سماوی به مرکز c (مرکز زمین) درست می‌شود را دایرهٔ البروج می‌نامند. در شکل ۲۱، فرض کنید نقطهٔ c مرکز کرهٔ سماوی باشد که بر آن استوای سماوی $T\gamma R$ و قطب شمال P نیز رسم شده اند. ممکن است تصور کنیم که ستاره‌ها را می‌شود از مرکز زمین، یعنی از نقطهٔ C، نگاه کرد، که درآن صورت مکان‌های معینی را روی کره سماوی اشغال می‌کنند. صفحهٔ دایرهٔ البروج مکان معینی نسبت به ستاره‌ها دارد، در نتیجه دایرهٔ البروج دایرهٔ عظیمهٔ ویژه‌ای است که طبق مشاهدات با استوای سماوی زاویه‌ای تقریباً برابر $۲۳\frac{۱۰}{۲}$ می‌سازد. در شکل ۲۱ دایرهٔ عظیمهٔ $Y\gamma MU$ نمایندهٔ دایرهٔ البروج و $M\hat{\gamma}R$ میل آن نسبت به استوای سماوی است که میل دایره البروج نامیده می‌شود. بظاهر خورشید نسبت به زمین روی کرهٔ سماوی در امتداد دایرهٔ

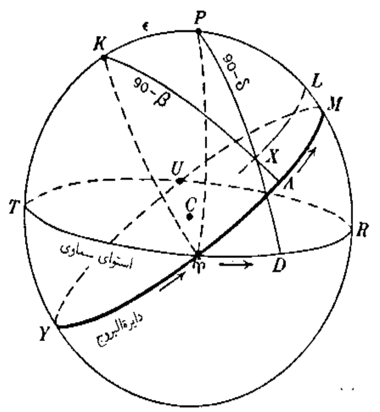
البروج (در جهت $Y\gamma M$) حرکت می‌کند و در یک سال دوبار مکان آن روی کرهٔ سماوی بر نقـاط برخـورد دایـرهٔ البـروج و استوای سماوی، یعنی نقاط U و γ، منطبق می‌شود. از γ تا M و از M تا U خورشید در طرف قطب شمال



شکل۲۰



شکل۱۹



شکل۲۱

استوا است و بنابراین میل آن شمالی است. همینطور از U تا Y و از Y تا γ میل خورشید جنوبی است. نقطـهٔ γ، کـه در آن میل خورشید از جنوبی به شمالی تغییر می‌کند، نقطهٔ اعتدال بهاری نامیده می‌شود. از همین طریق نقطهٔ مرجع γ را کـه بعـد ستاره‌ها نسبت به آن سنجیده می‌شود پیدا می‌کنند. بدین ترتیب اگر X یک ستاره باشد بعد آن γD یا α است که در راستای استوا از γ به طرف شرق اندازه گیری می‌شود و میل آن، δ، برابر DX است. از نمودار دیده می‌شود که بعد و میل خورشید، هر دو پیوسته تغییر می‌کنند. هنگامی که خورشید در γ است بعد و میل آن هر دو صفرند (این وضع، که بـه اعتـدال بهـاری، معروف است تقریباً در ۲۱ مارس[1] رخ می‌دهد)؛ در M بعد خورشید 6^h و میل آن تقریباً $23\frac{1^{\circ}}{2}N$ است (این وضع، که به انقلاب تابستانی معروف است، تقریباً در ۲۱ ژوئن رخ می‌دهد)؛ در U بُعد خورشید 12^h و میل آن 0° است (این وضع، کـه

[1]. درست در لحظهٔ تحویل سال ایرانی، یعنی اول فروردین.- م.

به اعتدال پاییزی معروف است، تقریباً در ۲۱ سپتامبر رخ می‌دهد)؛ و در Y بعد خورشید 18^h و میل آن تقریباً $23\frac{1^\circ}{2}S$ است (این وضع، که به انقلاب زمستانی معروف است، در ۲۱ دسامبر رخ می‌دهد).

۲٦. عرض و طول سماوی

در تعیین مکان یک جرم آسمانی می‌توان دایرهٔ البروج را به عنوان دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی و نقطهٔ اعتدال بهاری γ را به عنوان نقطهٔ مرجع اصلی به کار برد. در شکل ۲۱، K قطب شمال دایرهٔ البروج و KXA کمان دایرهٔ عظیمه‌ای است که از X می‌گذرد و دایرهٔ البروج را در A قطع می‌کند. کمان γA که از γ به A در راستای دایرهٔ البروج در جهت حرکت سالیانهٔ خورشید، یعنی به سوی شرق از $\circ^\circ$ تا $36\circ^\circ$ اندازه گیری می‌شود، طول سماری نام دارد. کمان AX عرض سماوی X است؛ عرض سماوی شمالی مثبت، و عرض سماوی جنوبی منفی در نظر گرفته می‌شود. اگر بعد و میل ستاره معلوم باشند، از مثلث KPX می‌توانیم عرض سماوی (β) و طول سماوی (λ) آن را به دست آوریم و برعکس. حال چون λ قطب دایرهٔ عظیمهٔ KPMR است، پس داریم $K\hat{P}\gamma = ۹\circ^\circ$ و چون داریم $\gamma D = \gamma\hat{P}X = \alpha$، بنابراین $K\hat{P}X = ۹\circ^\circ + \alpha$. همچنین $P\hat{K}\gamma = ۹\circ^\circ$، و چون $\gamma A = \gamma\hat{K}X = \lambda$، پس $P\hat{K}X = ۹\circ^\circ - \lambda$. همچنین $PX = ۹\circ^\circ - \delta$ و داریم $KX = ۹\circ^\circ - \beta$. فرض کنید ε میل دایرهٔ البروج باشد؛ این زاویه بین شعاع‌های CM و CR واقع است، بنابراین $RM = \varepsilon$. اما $KM = ۹\circ^\circ$ و $PR = ۹\circ^\circ$، از این رو . $kp = \varepsilon$ با به کار بردن فرمول‌های (الف)، (ب)، و (ج)، داریم

$$\cos KX = \cos PX \cos KP + \sin PX \sin KP \cos KPX$$
$$\sin KX \sin PKX = \sin PX \sin KPX$$
$$\sin KX \cos PKX = \cos PX \sin KP - \sin PX \cos KP \cos KPX$$

یا

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \quad (۱۰)$$

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \quad (۱۱)$$

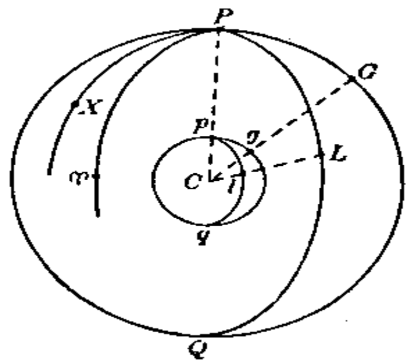
$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \quad (۱۲)$$

به همین ترتیب، بعد α و میل δ را می‌توان برحسب λ,β، و ε بیان کرد. فرمول‌های مربوط عبارت اند از

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$
$$\cos\delta\cos\lambda = \cos\beta\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

۲۷. زمان نجومی

فرض کنید زمین و کرهٔ سماوی (به مرکز C) مانند شکل ۲۲ رسم شوند و نیز فرض کنید g مکان گرینویچ و l مکان هر محل دیگری را روی زمین نشان دهند. بدیهی است که زاویهٔ بین نصف النهارهای plq ,pgq، طول جغرافیایی L است و در این مثال م غرب گرینویچ است. شعاع‌های Cg و CL را امتداد می‌دهیم تا کره سماوی را در G و L قطع کنند. در این صورت G و L به ترتیب



شکل۲۲

سمت الرأس‌های گرینویچ و L هستند. اگر X مکان یک جرم آسمانی در یک لحظهٔ معین باشد، $G\hat{P}X$ زاویهٔ ساعتی X برای راصدی روی دایرهٔ نصف النهار گرینویچ و $L\hat{P}X$ زاویهٔ ساعتی آن برای راصدی روی دایرهٔ نصف النهار L است. اما $G\hat{P}X = L\hat{P}X + G\hat{P}L$ و $G\hat{P}L = g\hat{p}l$؛ از این رو داریم

۱۳) طول غربی L + زاویهٔ ساعتی X در L= زاویهٔ ساعتی X در گرینویچ

در این فرمول فرض بر این است که طول جغرافیایی L با مقیاس زمان بیان می‌شود ($۱۵^{\circ} = ۱^{h}$ ،$۱۵' = ۱^{m}$ ،$۱۵'' = ۱^{s}$).
فرمول (۱۳) کلی است و آشکارا در مورد نقطهٔ اعتدال بهاری γ نیز صادق است. پس چون زمان نجومی برابر زاویهٔ ساعتی γ است داریم

۱٤) طول جغرافیایی L ± زمان نجومی در L = زمان نجومی در گرینویچ

علامت + آنگاه اختیار می‌شود که L در غرب گرینویچ باشد و علامت منفی برای وقتی است که L در شرق گرینویچ است. زمان نجومی در L را زمان نجومی محلی (LST) می‌نامند.

۲۸. زمان خورشیدی متوسط

روز نجومی یک یکای زمان رصدخانه‌ای است و برای تنظیم کارهای روزانه، که مکان خورشید در آسمان برای آن حکم فرماست چندان مناسب نیست. هنگامی که خورشید روی دایرهٔ نصف النهار یک محل است، گوییم در آن جا ظهر ظاهری است؛ موقعی که خورشید دوباره به همان دایرهٔ نصف النهار می‌رسد گفته می‌شود یک روز خورشیدی ظاهری سپری شده است. اگر این بازهٔ زمانی را، برای مثال، با ساعتی که زمان نجومی دقیق را نشان می‌دهد اندازه بگیریم معلوم می‌شود که روز خورشیدی ظاهری ثابت نیست. قبلاً دیدیم که خورشید نسبت به زمین به ظاهر در یک مدار بیضی وار به دور آن حرکت می‌کند و آهنگ تغییر جهت آن در مدار ثابت نیست. در نتیجه خورشید به ظاهر دایرهٔ البروج را با آهنگی نایکنواخت می‌پیماید. به عبارت دیگر، چنین به نظر می‌رسد که خورشید به نحوی نامنظم نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها حرکت می‌کند. بدین دلیل و نیز به دلیل اینکه خورشید روی دایرهٔ البروج حرکت می‌کند و نه در امتداد استوای سماوی (دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی که اندازه گیری زاویهٔ ساعتی یا زمان به آن وابسته است)، بعد آن به طور یکنواخت افزایش نمی‌یابد. روز خورشیدی ظاهری میانگین را در سال، روز خورشیدی متوسط می‌نامند و یک تعریف آسانتر این است که بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی یک جسم فرضی به نام خورشید میانگین را از دایرهٔ نصف النهار راصد، یک روز خورشیدی مختوسط بخوانیم . فرض کنید خورشید میانگین روی استوای سماوی با آهنگی یکنواخت به دور زمین حرکت می‌کند. آهنگ حرکت طوری است که خورشید میانگین یک گردش کامل را روی استوای سماوی در همان مدتی انجام می‌دهد که خورشید روی دایره البروج. طبق این تعریف، بُعد خورشید میانگین (که با RAMS نشان داده می‌شود) با آهنگی یکنواخت افزایش می‌یابد.

حال اگر خورشید میانگین را یک جرم آسمانی معمولی بدانیم آن وقت می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظهٔ معین در هر محلی روی سطح زمین، خورشید میانگین زاویهٔ ساعتی (HAMS) ویژه‌ای دارد. فرض می‌کنیم که در این لحظهٔ بُعد خورشید میانگین معلوم است، بنابراین از رابطهٔ (۸) یا (۹) داریم

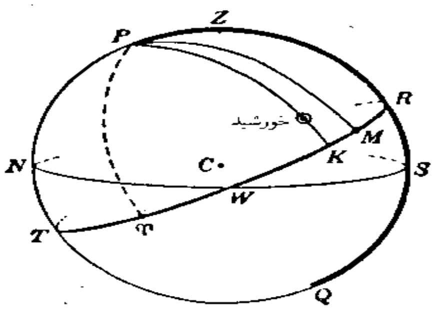
$$ST = HAMS + RAMS \tag{۱۵}$$

زمانی که در هر لحظه با یک زمان سنج متوسط، مثلاً، در گرینویچ نشان داده می‌شود صرفاً به مقدار HAMS در آن محل مربوط می‌شود و اگر RAMS معلوم باشد رابطهٔ (۱۵) مبنای مقایسهٔ زمان سنج‌های نجومی و زمان سنج‌های متوسط را تشکیل می‌دهد. خورشید میانگین و خورشید واقعی طبق برخی اصول که در یکی از فصل‌های آینده بحث خواهند شد، به

هم مربوط می‌شوند. همچنین کافی است گفته شود که اختلاف بین بُعد خورشید میانگین و خورشید واقعی را می‌توان در هر لحظه محاسبه کرد، این اختلاف به تعدیل زمان[۱] (که با E نشان داده می‌شود) موسوم است. بدین ترتیب داریم

$$E = RAMS - RA\Theta \qquad (۱۶)$$

که در آن $RA\Theta$ نمایندهٔ بعد خورشید واقعی است. مقدار E می‌تواند مثبت یا منفی باشد و به طوری پیچیده تغییر مـی‌کنـد. محاسبهٔ مفصل E در بخش ۹۱ شرح داده می‌شود. فرض می‌کنیم



شکل۲۳

در شکل ۲۳ در لحظه‌ای معین، بعد و میل خورشید (Θ) معلوم باشند و همچنین γ نقطـهٔ اعتـدال بهـاری در همـین لحظـه باشد، به طوری که $R\hat{P}\gamma$ یا $R\gamma$ زاویهٔ ساعتی γ، یعنی زمان نجومی محلی است. اگر این زمان معلوم باشد، می‌تـوان مکـان γ را روی کرهٔ سماوی به روشنی مشخص کرد. در این صورت می‌توان مکان خورشید را روی کرهٔ سماوی نشان داد. حـال $\gamma K = RA\Theta$ و $K\Theta$ میل خورشید است و هر دو بنا به فرض معلوم اند، اگر مقدار E مثبت باشد آن وقت طبق رابطهٔ (۱۶)، RAMS بزرگتر از $RA\Theta$ و اگر E معلوم باشد مکان خورشید میانگین M را در این لحظه می‌توان در نمودار مشخص کـرد. $R\hat{P}M$ یا RM زاویهٔ ساعتی M (HAMS) است. از شکل ۲۳ روشن است که چون RK=RM+MK است، پس داریم

$$HA\Theta = HAMS + E \qquad (۱۷)$$

که رابطهٔ مهمی است و HAMS و $HA\Theta$ را به هم مربوط و امکان محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی خورشید $(HA\Theta)$ را، در صـورت معلوم بودن سایر کمیت‌ها فراهم می‌کند. هنگامی که خورشید میانگین روی دایرهٔ نصف النهار یک محل است، در آن جا ظهر متوسط محلی است. وقتی خورشید میانگین روی دایرهٔ نصف النهار گرینویچ است، ظهر متوسط گرینویچ است. زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در گرینویچ در این کتاب با GMAT (زمان نجومی متوسط گرینـویچ) نشـان داده مـی‌شـود. هنگـامی کـه خورشید میانگین در T است یعنی HAMS برابر 12^h است می‌گوییم نیمه شب متوسط است. وقتـی $GMAT = 12^h$ اسـت

[۱]- در کتاب هاي درسي قديم تعديل زمان به صورت $E = RA\Theta - RAMS$ تعريف شده است، ولي قرارداد (۱٦) عموماً قابل قبول است.

نیم شب متوسط گرینویچ است و در این لحظه یک روز مدنی جدید در گرینویچ آغاز می‌شود. زمـان متوسـطی کـه از نیمـه شب گرینویچ محاسبه می‌شود زمان متوسط گرینویچ (GMT)[1] خوانده می‌شود و اکنون آن را زمان جهانی **(UT)** مـی‌نامنـد. واضح است که داریم

$$UT = GMT = GMAT + 12^h \qquad (۱۸)$$

همین طور، برای هر محلی که زمان متوسط ویژهٔ دایرهٔ نصف النهار خود را نگاه دارد، خواهیم داشت

۱۲ ساعت+ زمان نجومی متوسط محلی= زمان متوسط محلی

یا

(MT) محلی = (MAT) محلی + 12^h (۱۹)

$= HAMS \pm 12^h$ (۲۰)

فرمول (١٤) رابطهٔ بین زمان نجومی در گرینویچ و زمـان نجـومی در هـر محـل L را بـه دسـت مـی‌دهـد. از شـکل ۲۲ و از رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) روشن است که رابطهٔ مشابهی بین زمان متوسط گرینویچ و زمان متوسط محلی خواهیم داشت، از این رو

زمان جهانی ≡ زمان متوسط گرینویچ= زمان متوسط محلی ± طول جغرافیایی L

یا

(۲۱) طول جغرافیایی L ± محلی (MT)= ≡UT GMT

علامت + برای وقتی است که طول جغرافیایی محل L غربی باشد و برای طول شرقی علامت − اختیار می‌شود.

اگر هر محلی زمان متوسط محلی وابسته به دایرهٔ نصف النهار خود را نگه دارد، درآمیختگی اجتناب ناپذیر خواهـد بـود و از این رو در کشورهای کوچک یک زمان متوسط استاندارد، وابسته به یک دایرهٔ نصف النهـار ویـژه (نصـف النهـار اسـتاندارد) انتخاب می‌شود و در سراسر کشور به طور یکسان به کار می‌رود. در انگلستان زمان متوسط استاندارد، زمان متوسط گرینویچ

[1]. تا بیش از سال ۱۹۲۵، در تقویم هاي نجومي براي بیان زمان نجومي متوسط در گرینویچ (GMAT)، زمان متوسط گرینویچ (GMT) به کار مي رفت. از سال ۱۹۲۵ زمان به کار رفته، زمان متوسط گرینویچ $(\equiv GCT)$ GMT بود که بعداً، چنان که در بالا گفته شد، UT جانشین آن شد. اخیراً، به دلایلي که در پیوست د بیان مي شود، در تقویم هاي نجومي به جاي UT از زمان زیجي (ET) استفاده مي کنند. اختلاف بین UT و ET به قدري ناچیز است که در این کتاب عموماً همان اولي را به کار خواهیم برد، مگر در مواردي که جز این گفته شود.

(GMT) است. در کشورهای بزرگی چون شوروی و ایالات متحدهٔ آمریکا دو زمان استاندارد یا بیشتر برای مناطق طولی مختلف به کار می‌رود و در هر منطقه زمان استاندارد مختص به دایرهٔ نصف النهار معین واقع در آن منطقه نگه داشته می‌شود. زمان استانداردی که بر مبنای نصف النهار ویژه‌ای تعیین می‌شود، زمان منطقه‌ای (ZT) نام دارد. در عمل، این دستگاه توسط کشتی‌ها در دریا نگه داشته می‌شود، زیرا آن‌ها معمولاً دچار پیچیدگی‌های جغرافیایی نیستند. نظیر رابطهٔ (۲۱)، داریم

۲۲) طول جغرافیایی نصف النهار استاندارد ± UT ≡ GMT = ZT

۲۹. مثال

برای روشن شدن مطلب مسئلهٔ کلی و مهم زیر را حل می‌کنیم. در محلی واقع در طول جغرافیایی '۱۶۳°۱۴ شرقی می‌خواهیم زاویهٔ ساعتی خورشید $(HA\Theta)$ را که مربوط به رصدی است که در ساعت $۸^h۴۶^m۲۲^s$ زمان منطقه‌ای در ۱۰ مارس ۱۹۷۵ انجام شده است محاسبه کنیم؛ زمان منطقه‌ای مربوط به نصف النهار استاندارد E °۱۶۵ $\left(۱۱^h E\right)$ است. نخست UT هنگام رصد را به دست می‌آوریم

زمان منطقه‌ای در ۱۰ مارس	$۸^h۴۶^m۲۲^s$
طول جغرافیایی نصف النهار استاندارد	-۱۱^h
زمان جهانی روز ۹ مارس	$UT = \overline{۲۱^h۴۶^m۲۲^s}$

طبق فرمول (۲۲)، ۱۱^hاز زمان منطقه‌ای کم می‌کنیم. (روشن است که زمان منطقه‌ای را می‌توانیم به صورت $۳۲^h۴۶^m۲۲^s$ روز ۹ مارس بنویسیم.)

سپس به کمک فرمول (۲۱) زمان متوسط محلی (یعنی زمان متوسط مربوط به طول جغرافیایی محل) را پیدا می‌کنیم.

زمان جهانی روز ۹ مارس	$۲۱^h۴۶^m۲۲^s$
طول جغرافیایی شرقی محل	$+۱۰^h\ ۵۲^m۵۶^s$

زمان متوسط محلی روز ۹ مارس $= \overline{۳۲^h ۳۹^m ۱۸^s}$

زمان متوسط محلی روز ۱۰ مارس $= ۸^h ۳۹^m ۱۸^s$

از فرمول (۲۰) مقدار HAMS (زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در محل) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$HAMS = ۲۰^h \ ۳۹^m ۱۸^s$$

گام بعدی اعمال تعدیل زمان برزاویهٔ ساعتی خورشید میانگین است.با استفاده از زیج نجومی، و درون یابی معلوم می‌شود که در لحظهٔ $۲۱^h ۴۶^m ۲۲^s$، زمان جهانی (UT) در روز ۹ مارس، $E = -۱۰^m \ ۳۶^S$ است.

بدین ترتیب از رابطهٔ (۱۷) داریم

$$HA\Theta = ۲۰^h ۳۹^m ۱۸^s - ۱۰^m \ ۳۶^s$$

یا

$$HA\Theta = ۲۰^h \ ۲۸^m ۴۲^s$$

۳۰. زاویهٔ ساعتی یک جرم آسمانی

برای محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی هر جرم آسمانی (X) غیر از خورشید، به روش زیر عمل می‌کنیم. از رابطه‌های (۸) و (۱۴) داریم

LST=HAX+RAX

و

$$\boldsymbol{GST = LST \pm l}$$

که از آن جا داریم

$$\boldsymbol{HAX + RAX = GST \pm l} \qquad (۲۳)$$

زمان نجومی گرینویچ در ۰^hزمان جهانی هر روز از سال در زیج نجومی جدول بندی شده است چون از رابطهٔ (۱۵) داریم

ST= HAMS+RAMS

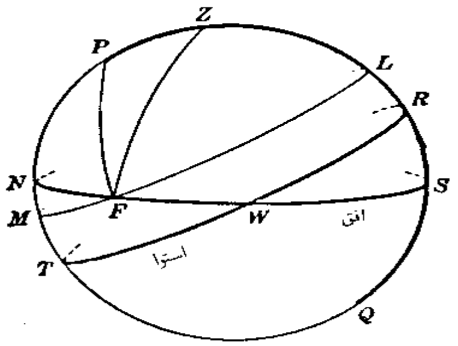
پس RAMS در ^{h}۰ زمان جهانی هر روز مساوی است با زمان نجومی گرینویچ در ^{h}۰ زمان جهانی آن روز از جدول منهای $RAMS.۱۲^h$ به طور یکنواخت با آهنگ ۵۶ر $۳^m۵۶^s$ در روز متوسط خورشید یا با آهنگ 856ر 9^s در ساعت متوسط خورشیدی افزایش می‌یابد؛ با استفاده از این بیان می‌توانیم مقدار RAMS را برای هر مقدار معین UT محاسبه کنیم.

جدول‌هایی برای ساده کردن این محاسبه، در تقویم‌های نجومی ارائه شده است. کاربرد فرمول (۲۳) با یک مثال به بهترین نحو روشن می‌شود. می‌خواهیم زاویهٔ ساعتی ستارهٔ ابط الجوزا (آلفا- جبار) را در زمان منطقه‌ای $۱۸^h۳۵^m۴۶^s$ در روز ۲۶ ژانویه ۱۹۷۵، در محلی که طول جغرافیایی آن "۶۴°۲۸'۴۹ غربی است محاسبه کنیم (منطقه، ۴^h+است یعنی نصف النهار استاندارد منطقه، ۴^h غربی یا °۶۰ غربی است).

زمان منطقه‌ای در ۲۶ ژانویه	$۱۸^h۳۵^m۴۶^s$	
منطقه	$+۴^h$	
UT در ۲۶ ژانویه	$\overline{۲۲^h۳۵^m۴۶^s}$	
تصحیح زمان نجومی	$۳^m۴۳^s$	(۵۶ ر ۳^m ۵۶^s بر روز)
GST در ^{h}۰ زمان جهانی	$۸^h۱۸^m۳۹^s$	از زیج
GST	$\overline{۳۰^h\ ۵۸^m\ ۰۸^s}$	
طول جغرافیایی غربی محل	$-۴^h۱۷^m۵۵^s$	
LST	$\overline{۲۶^h۴۰^m\ ۱۳^s}$	
RA ابط الجوزا را کم می‌کنیم	$۵^h۵۳^m۴۹^s$	از زیج
HA ابط الجوزا	$\overline{۲۰^h\ ۴۶^m۲۴^s}$	

۳۱. طلوع و غروب

شکل ٢٤ را در نظر بگیرید. وقتی جرم آسمانی X در نقطهٔ F به افق می‌رسد می‌گویند در این نقطه غـروب مـی‌کنـد. در ایـن موقع فاصلهٔ سمت الرأسی آن ۹۰° است، یعنی $ZF = ۹۰^\circ$. فرض کنید H زاویهٔ ساعتی X به هنگام غروب آن باشـد، بـه طوری که ZPF=H. همچنین $PF = 90^\circ - \delta$. فرض کنید ϕ عرض جغرافیایی محل و A سمت X (PZF) به هنگام



شکل۲۴

غروب باشد. از فرمول (الف)، داریم

$$\cos ZF = \cos PZ \cos PF + \sin PZ \sin PF \cos ZPF$$

یا

$$\cos 90^\circ = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$$

بنابراین، چون $\cos 90^\circ = 0$ است، داریم

$$\cos H = -\tan\phi \tan\delta \qquad (٢٤)$$

که از آن می‌توان زاویهٔ ساعتی جرم را به هنگام غروب آن محاسبه کرد. دوباره از فرمول (الف)، داریم

$$\cos PF = \cos PZ \cos ZF + \sin PZ \sin ZF \cos PZF$$
$$\sin\delta = 0 + \cos\phi \cos A$$

و سرانجام

$$\cos A = \sin\delta \sec\phi \qquad (٢٥)$$

که از آن می‌توان سمت جرم را به هنگام غروب آن محاسبه کرد.

از معادلات (۲٤) و (۲۵) یا از شکل ۲٤ دیده می‌شود که در عرض‌های شمالی، اگر میل جرم آسمانی باشد زاویـهٔ سـاعتی آن به هنگام غروب بین و سمت آن کمتر از 90° است (به گفتهٔ دیگر، جرم آسمانی بین غرب و شمال غروب می‌کند)؛ و اگـر میل جرم آسمانی جنوبی باشد، زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب بین 0^h و 6^h است و بین 6^h و 12^h جنوب و غرب غروب می‌کند. با همین روش می‌توان مسئلهٔ مربوط به طلوع جرم آسمانی را بررسی کرد. هنگامی که عرض جغرافیایی راصد جنوبی باشد نیز روند کار مانند بالاست.

اگر جرم آسمانی مورد نظر یک ستاره باشد زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب، بازهٔ زمانی عبور نصف النهاری و غـروب آن را برحسب زمان نجومی به دست می‌دهد. اگر جرم آسمانی خورشید باشد، بازهٔ زمانی بین عبـور نصـف النهـاری و غـروب آن برحسب زمان خورشیدی ظاهری بیان می‌شود. اما در طول این مدت مکان‌های نسبی خورشـید و خورشـید میـانگین تغییـر چندانی نخواهند کرد (به عبارت دیگر، تغییر در تعدیل زمان را می‌توان نادیده گرفت، مگر اینکه دقت بسیار مطلوب باشد) و بنابراین این بازهٔ زمانی را، عملاً، می‌توان بر حسب زمان متوسط بیان کرد. بدین ترتیب اگر طبق فرمول (۲٤) زاویهٔ ساعتی H به هنگام غروب خورشید 7^h30^m باشد آن وقت بازهٔ بین عبور نصف النهاری خورشید و غروب آن 7^h30^m زمـان متوسـط خورشیدی خواهد بود. اگر از تغییر میل خورشید چشم بپوشیم، نتیجه می‌گیریم که این زاویهٔ ساعتی برابـر بـازهٔ زمـانی بـین طلوع خورشید و عبور نصف النهاری آن نیز هست. بدین ترتیب خورشید به مدت 15^h بالای افق و 9^h زیر افق است. البته در عمل، به سبب حرکت خورشید در طول دایرهٔ البروج، میل آن به هنگام طلوع و غروب یکسان نیست و تأثیر آن را می‌توان محاسبه کرد.

فرمول (۲٤) نشان می‌دهد که اگر $\phi > 90^\circ - \delta$ باشد، مقدار عددی cosH بزرگتر از یک خواهد بود بـه طـوری کـه ایـن معادلـه نمـی‌توانـد مقـداری بـرای H بـه دسـت دهـد. در ایـن حالـت، خورشـید در آن عـرض‌هـا و در آن روزهـایی کـه $\phi > 90^\circ - \delta$ است غروب نمی‌کند؛ چیزی که صحت آن را در یک نمودار نیز می‌توان نشان داد. در روز اول تابستان، میل شمالی خورشید بیشینه، یعنی تقریباً برابر $23\frac{1}{2}^\circ$ شمالی است، بنابراین خورشید در آن روز در عرض‌های جغرافیایی $66\frac{1}{2}^\circ$ شمالی بی آنکه غروب کند بالای افق می‌ماند.[1] در قطب شمال، چون $\phi > 90^\circ - \delta$ است خورشید از اول فروردین تـا اول

[1]. عبارت خورشید نیمه شب از این جا آمده است.

مهر که δ شمالی است، همواره بالای افق است و شش ماه باقی مانده را زیر افق است. مدار $66\frac{1^\circ}{2}$ شمالی، مدار شمالگان و همانند آن در نیمکرهٔ جنوبی ($66\frac{1^\circ}{2}$ جنوبی) را مدار جنوبگان می‌نامند.

۳۲. آهنگ تغییرات فاصلهٔ سمت الرأسی و سمت

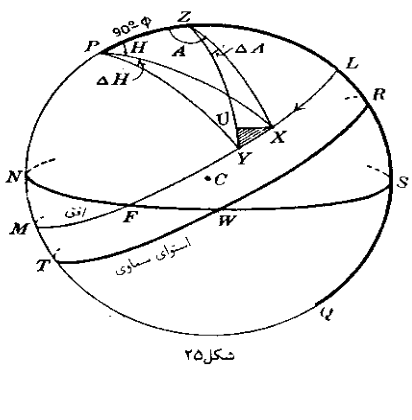
فرض کنید X، در شکل ۲۵ مکان یک جرم آسمانی روی کرهٔ سماوی در یک لحظهٔ معین و Y مکان آن اندکی دیرتر است. میل را ثابت بگیرید به طوری که X و Y روی دایرهٔ صغیرهٔ LM (مدار) که P قطب آن است قرار گیرند. کمان‌های دایرهٔ عظیمهٔ PX، PY، ZX، ZY را رسم کنید. اگر UX کمان دایرهٔ صغیره‌ای به قطب Z باشد، در این صورت ZX=ZU. فرض کنید که $Z\hat{P}X = H$, $Z\hat{P}Y = H + \Delta H$ به طوری که $X\hat{P}Y = \Delta H$. اگر $X\hat{Z}Y = \Delta A$ و $P\hat{Z}X = A$ و نیز $ZX = z$ و $ZY = z + \Delta z$ باشد، آن وقت $UY = \Delta z$ خواهد بود. چون XY کمان کوچکی فرض شده است، می‌توانیم UXY را مثلث مسطحی بگیریم که در آن U یک زاویهٔ قائمه است.

همین که جرم آسمانی، به سبب حرکت شبانه روزی، از X به Y می‌رود فاصلهٔ سمت الرأسی آن به اندازهٔ Δz افزایش می‌یابد و زاویهٔ ساعتی و سمت آن به ترتیب به اندازهٔ ΔH و ΔA کاهش می‌یابند. از فرمول (۱) بخش ۳ داریم

$$XY = X\hat{P}Y \sin PX = \Delta H \cos\delta$$

و

$$UX = X\hat{Z}Y \sin ZX = \Delta A \sin z$$



شکل۲۵

زاویهٔ PXZ را با η نشان می‌دهیم و آن را زاویهٔ اختلاف منظر می‌نامیم. چون Y خیلی نزدیک به X است، می‌توانیم $P\hat{Y}Z$ برابر η بگیریم. پس

UY=XYcosUYX

و

UX=XYsinUYX

چون $P\hat{Y}Z=\eta$ و $P\hat{Y}X=90^\circ$ است، از این رو داریم

$$UY \equiv \Delta z = \Delta H \cos\delta \sin\eta$$

و

$$UX \equiv \Delta A \sin z = \Delta H \cos\delta \cos\eta$$

حال در مثلث کروی PXZ از فرمول (ب) داریم

$$\cos\delta \sin\eta = \sin A \cos\phi$$

و از فرمول (ج) داریم

$$\cos\delta\cos\eta = \sin\phi\sin z - \cos\phi\cos z\cos A$$

از این رو

$$\Delta z = \Delta H \sin A \cos\phi \qquad (۲٦)$$

و

$$\Delta A = \Delta H\left(\sin\phi - \cos\phi\cot z\cos A\right) \qquad (۲۷)$$

در این فرمول ها، فرض بر این است که $\Delta A, \Delta z, \Delta H$ با مقیاس دایره‌ای بیان شده اند. فرض کنید ΔH^s تعداد ثانیه‌های زمانی در ΔHرادیان را نشان دهد و همچنین $\Delta z''$و $\Delta A''$ به ترتیب تعداد ثانیه‌های قوسی در Δz و ΔA رادیان باشند. در این صورت طبق اصول بخش ۱۵ خواهیم داشت.

$$\Delta z = \Delta z''\sin ۱'', \Delta A = \Delta A''\sin ۱'', \Delta H = \Delta H \sin ۱^s.$$

و چون $\sin ۱^s = ۱۵ \sin ۱''$، داریم

$$\Delta z'' = ۱۵ \Delta H^s \sin A \cos\phi$$
$$\Delta A'' = ۱۵ \Delta H^s (\sin\phi - \cos\phi \cot z \cos A)$$

اگر ΔH^s مساوی یک ثانیه باشد، این معادلات به ترتیب نشان می‌دهند که فاصلهٔ سمت الرأسی جرم آسمانی با آهنگ $۱۵ \sin A \cos\phi$ قوسی در هر ثانیهٔ زمانی افزایش و سمت آن با آهنگ $۱۵[\sin\phi - \cos\phi \cot z \cos A]$ ثانیهٔ قوسی در هر ثانیهٔ زمانی کاهش می‌یابد.

اگر جرم آسمانی یک ستاره باشد. آهنگ تغییرات فاصلهٔ سمت الرأسی و سمت آن با مقیاس ثانیهٔ قوسی بر ثانیهٔ زمانی نجومی بیان می‌شود. در مورد خورشید، آهنگ این تغییرات بر حسب ثانیه قوسی بر ثانیهٔ زمان خورشیدی ظاهری یا، با دقت کافی، بر ثانیهٔ زمان متوسط خورشیدی است.

نتایج به دست آمده در بالا را می‌توان به سهولت به مشتق گیری، به دست آورد. از مثلث PZX، به موجب فرمول (الف)، داریم

$$\cos z = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H$$

که در آن δ و ϕ ثابت فرض می‌شوند. با مشتق گیری خواهیم داشت

$$\sin z \frac{dz}{dH} = \cos\delta \cos\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H$$

از فرمول (ب)، داریم

$$\sin z \sin A = \sin H \cos\delta \qquad (۲۸)$$

بنابراین

$$\frac{dz}{dH} = \sin A \cos\phi \qquad (۲۹)$$

که در اصل همان رابطهٔ (۲٦) است. اگر z و H به ترتیب برحسب ثانیهٔ قوسی و ثانیهٔ زمانی بیان شوند، آن وقت، داریم

$$\frac{dz}{dH} = ۱۵ \sin A \cos\phi$$

از رابطهٔ (۲۸) که در آن z، A، و H متغیرند، نسبت به H مشتق می‌گیریم. بنابراین

$$\sin z \cos A \frac{dA}{dH} = \cos H \cos\delta - \sin A \cos z \frac{dz}{dH}$$
$$= \cos H \cos\delta - \sin^{۲} A \cos z \cos\phi$$

که در آن از رابطهٔ (۲۹) استفاده شده است. همچنین از (ج)، داریم

$$\cos\delta \cos H = \cos z \cos\phi - \sin z \sin\phi \cos A$$

بنابراین

$$\sin z \cos A \frac{dA}{dH} = \cos^2 A \cos z \cos\phi - \sin z \sin\phi \cos A$$

سرانجام

$$\frac{dA}{dH} = -(\sin\phi - \cot z \cos A \cos\phi)$$

یا اگر A و H به ترتیب برحسب ثانیهٔ قوسی و ثانیهٔ زمانی بیان شوند، فرمول اخیر به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{dA}{dH} = -15(\sin\phi - \cot z \cos A \cos\phi)$$

که پیشتر به دست آمد.

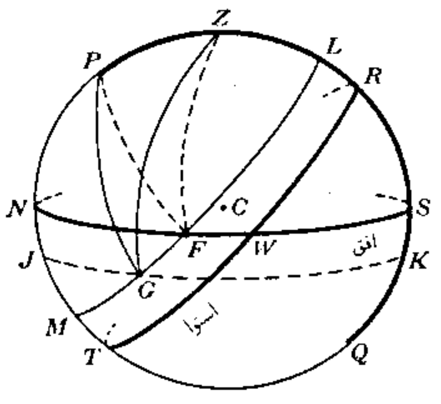
۳۳. شفق

پس از غروب خورشید، نور غیر مستقیم آن که به وسیلهٔ جو بالایی بازتاب و پراکنده می‌شود، همچنان زمین را روشن نگه می‌دارد، لیکن این روشنایی با فرو رفتن بیشتر خورشید به زیر افق، کاهش می‌یابد. هنگامی که خورشید به اندازهٔ ۱۸° زیر افق است (در این هنگام فاصلهٔ سمت الرأسی آن ۱۰۸° است)، روشن سازی غیر مستقیم کاملاً ناچیز می‌شود. بازهٔ زمانی بین غروب خورشید و لحظه‌ای که فاصلهٔ سمت الرأسی آن به ۱۰۸° می‌رسد مدت شفق خوانده می‌شود. مدت سپیدهٔ بامدادی (فلق) نیز به روشی مشابه تعریف می‌شود. برای مثال، مدت شفق را می‌توان به روش زیر محاسبه کرد. در شکل LFM،۲٦

مدار خورشید است (در این محاسبهٔ ویژه، چون نیازی به دقت زیاد نیست از تغییرات میل خورشید در طول روز مورد نظر چشم می‌پوشیم) و JGK دایرهٔ صغیره‌ای است موازی افق، که فاصلهٔ هر نقطهٔ آن از Z برابر ۱۰۸° است. این دایرهٔ صغیره، مدار خورشید را در نقطهٔ G قطع می‌کند. بنابراین، زمانی که لازم است تا خورشید از F به G برود، یعنی $F\hat{P}G$، برابر مدت شفق است. حال $F\hat{P}G = Z\hat{P}G - Z\hat{P}F$ است و چون $Z\hat{P}F$ زاویهٔ ساعتی خورشید به هنگام غروب است، مقدار آن را می‌توان از فرمول (۲٤) حساب کرد. در مثلث ZPG داریم $PG = 90^\circ - \delta, PZ = 90^\circ - \phi, ZG = 108^\circ$؛ از این رو به موجب فرمول (الف) داریم

$$\cos 108^\circ = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos Z\hat{P}G$$

که محاسبهٔ $Z\hat{P}G$ را امکان پذیر می‌کند. البته، مقدار δ که در این فرمول به کار رفته است، بستگی به روز ویژهٔ سال مورد نظر دارد. بدین ترتیب مدت شفق پیدا می‌شود.



شکل ۲۶

از شکل ۲۶ روشن است که اگر NM بزرگتر از NJ باشد، به گفتهٔ دیگر اگر در نیمه شب ظاهری، خورشید بیش از ۱۸° زیر افق باشد شفق به پایان می‌رسد. حال چون $NT = 90^\circ - \phi$ و $MT = \delta$ است، پس $NM = 90^\circ - \phi - \delta$. از این رو، اگر $90^\circ - \phi - \delta > 18^\circ$ یا اگر $\delta < 72^\circ - \phi$ شفق پایان می‌یابد. برای مثال، در عرض جغرافیایی ٦٠° شمالی، اگر $\delta < 12^\circ$ شفق به پایان خواهد رسید. هنگامی که δ بزرگتر از ۱۲° است، فاصلهٔ سمت الرأسی خورشید بین غروب و نیمه شب ظاهری و همچنین بین نیمه شب ظاهری و طلوع کمتر از ۱۰۸° است و بنابراین در 60°، در روزهایی از سال که میل خورشید از ۱۲°شمالی بیشتر می‌شود، آسمان هرگز به طور کامل تاریک نمی‌شود، این روزها بین ۳ اردیبهشت و ۳۱ مردادند.

تمرین ها

نمادهای به کار رفته عبارت اند از:

ϕ= عرض جغرافیایی راصد، z = فاصله سمت الرأسی

A= سمت جرم آسمانی، ε= زاویهٔ میل دایرهٔ البروج

H= زاویهٔ ساعتی

۱. اگر z_1 و z_2 به ترتیب فاصله‌های سمت الرأسی ستاره‌ای روی دایرهٔ نصف النهار و قائم مبدأ باشند، ثابت کنید که
(الف) $\cot\delta = \operatorname{cosec} z_1 \sec z_2 - \cot z_1$ که در آن δ میل ستاره است.

(ب) $\cot\phi = \cot z_1 - \cos\sec z_1 \cos z_2$

[لندن، ۱۹۲۹]

۲. اگر ψ زاویه‌ای باشد که مسیر یک ستاره هنگام طلوع با افق می‌سازد، ثابت کنید که

$$\cos\psi = \sin\phi \sec\delta$$

۳. اگر زاویه‌های ساعتی ستاره‌ای به میل $+\delta$ روی قائم مبدأ (غربی) و به هنگام غروب، برای محلی در عرض جغرافیایی شمالی، به ترتیب h و H باشند نشان دهید که

$$\cos h \cos H + \tan^{۲}\delta = ۰$$

بازهٔ زمانی بین عبور دبران (به میل $+۱۶^\circ ۲۲'$) از روی قائم مبدأ (غربی) و غروب آن را برای محلی در عرض جغرافیایی 36° شمالی (با دقت ۱ ر ۰ دقیقهٔ زمان متوسط خورشیدی) حساب کنید.

[لندن، ۱۹۲۶]

۴. قایقی با سرعت ۵ گره دریایی حرکت می‌کند و پیوسته به سوی ستاره‌ای پیش می‌رود. ثابت کنید که مسافت طی شده به طرف غرب تقریباً برابر $۱/۳\left(z_۲^\circ - z_۱^\circ\right)\sec\phi$ مایل است، که در آن z_1° و z_2° فاصله‌های سمت الرأسی آغازی و پایانی ستاره، برحسب درجه و ϕ میانگین عرض جغرافیایی است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۷]

۵. اگر متمم عرض برابر C باشد ثابت کنید.

$$C = x + \cos^{-1}(\cos z \sec y)$$

که در آن

$$\tan x = \cot\delta \cos H$$
$$\sin y = \cos\delta \sin H$$

و H زاویهٔ ساعتی است.

۶. بازهٔ زمانی بین عبور دو ستاره با میل‌های 60° شـمالی و 60° جنـوبی و فاصـلهٔ $\cos^{-1}\left(-\frac{5}{8}\right)$ از یکـدیگر را از دایـرهٔ نصف النهار با دقت یک ثانیهٔ زمانی متوسط خورشیدی پیدا کنید. (یک سال را $365\frac{1}{4}$ روز بگیرید).

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۳]

۷. اگر میل δ ستاره از عرض جغرافیایی ϕ بیشتر باشد، ثابت کنید که بیشترین سمت شرقی یا غربی این ستاره برابر است با

$$\sin^{-1}(\cos\delta \sec\phi)$$

۸. در ساعت $21^h 56^m$ زمان جهانی در ۲۸ مارس ۱۹۲۷ ستارهٔ درخشانی از میان ابرها با ارتفـاع (تقریبـی) $37^\circ 10'$ و سـمت 136° غربی رصد شد؛ مکان راصد عبارت بود از عرض جغرافیایی 50° شـمالی، طـول جغرافیـایی $7^\circ 15'$ غربـی. سـتاره را مشخص کنید (RAMS تقریباً $0^h 21^m$ بود).

[لندن، ۱۹۲۷]

۹. بُعد عیوق در لحظهٔ عبور بالایی در گرینویچ روز ۳۰ مه ۱۹۳۰ برابر $5^h 11^m$ و میل آن $+45^\circ 55'$ بود. ارتفاع و سمت این ستاره را در همان لحظه در نیویورک، در رصدخانهٔ دانشگاه کلمبیا به عرض جغرافیایی $40^\circ 49'$ شـمالی و طـول جغرافیـایی $4^h 56^m$ غربی پیدا کنید.

۱۰. در عرض جغرافیایی شمالی 45° بزرگترین سمت یک ستاره پیرا قطبی 45° (شرقی یا غربی) است. ثابت کنید که میـل ستاره $+60^\circ$ است.

۱۱. اگر میل یک ستاره و عرض جغرافیایی ϕ معلوم باشند، نشان دهید که خطـای موجـود در مقـدار محاسـبه شـدهٔ زاویـهٔ ساعتی، ناشی از خطایی به اندازهٔ Δz در فاصلهٔ سمت الرأسی ستاره، $\Delta z \cos ec A \sec\phi$ است، که در آن A سـمت سـتاره است.

۱۲. اگر در ضمن اینکه زاویه ساعتی یک ستاره به اندازه ΔH افزایش می‌یابد، راصدی عرض جغرافیایی خـود را بـه انـدازهٔ $\Delta\phi$ افزایش دهد، نشان دهید که تغییر در ارتفاع برابر است با

$$\Delta\phi \cos A - \Delta H \sin A \cos\phi$$

۱۳. a و $a + \Delta a$ ارتفاع‌های خورشیدند که از دو محل مجاور روی یک دایرهٔ نصف النهار به طور همزمان اندازه گیری شـده اند. اگر ϕ عرض جغرافیایی یکی از این دو محل و δ میل خورشید باشد، ثابت کنید که اختلاف بین عرض‌های جغرافیایی این دو محل تقریباً برابر است با

$$\Delta a \cos a \cos\phi / (\sin\delta - \sin a \sin\phi)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۱٤. دو ستارهٔ (α,δ) و (α',δ') در یک لحظه روی یک دایرهٔ قائم رصد می‌شوند. اگر H زاویـهٔ سـاعتی سـتارهٔ اول باشـد، ثابت کنید که

$$\cos(\chi + H) = \tan\phi \cos\chi \cot\delta$$

که در آن χ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\tan\frac{۱}{۲}(\alpha - \alpha' - ۲\chi) = \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\delta' + \delta)} \cot\frac{۱}{۲}(\alpha' - \alpha)$$

۱۵. اگر طول سایهٔ یک دیرک قائم روی زمین تراز در ظهر ظاهری یکی از روزهای اعتـدالین x باشـد، و طـول سـایهٔ همـان دیرک در انقلاب تابستانی در لحظه عبور خورشید از روی قائم مبدأ y باشد نشان دهید که

$$x = y \tan\psi \tan\phi$$

که در آن

$$\sin\psi = \sin\varepsilon \cos ec\phi$$

[لندن، ۱۹۲۸]

۱۶. دیواری راست به ارتفاع h، در جهت θ درجهٔ غرب جنوب کشیده شده است. ثابت کنید که وقتی زاویهٔ ساعتی H خورشید در یک روز اعتدالی از رابطهٔ

$$\tan H = \sin\phi \tan\theta$$

به دست می‌آید، دیوار سایه نمی‌اندازد و در ظهر ظاهری پهنای سایه برابر $h\tan\phi\sin\theta$ است.

۱۷. راصدی در عرض جغرافیایی 50° ستاره‌ای را می‌بینید که درست در غرب پشت یک تپهٔ کم ارتفاع، که در فاصلهٔ ٦ ر ۱ کیلومتری است و با شیب 30° نسبت به افق به طرف شمال سرازیر می‌شود، غروب می‌کند. ثابت کنید که اگر راصد گامی به طول ۹۱ سانتی متر به طرف راست خود بردارد، ستاره را برای مدت ۲۲ ثانیهٔ دیگر خواهد دید.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۳]

۱۸. فاصلهٔ قطبی دایرهٔ عظیمه‌ای که از دو محل با یک عرض جغرافیایی می‌گذرد برابر میل خورشید است. ثابت کنید که طول شب در این دو محل با اختلاف طول جغرافیایی آن‌ها برابر است.

۱۹. فرض کنید α و δ مختصات یک ستاره نسبت به دایرهٔ عظیمهٔ S و α' و δ' مختصات همان ستاره نسبت به دایرهٔ عظیمهٔ دیگر 'S باشند. اگر I زاویهٔ میل 'S نسبت به S باشد و گرهٔ صعودی 'S بر S دارای مختصات $(\theta,0)$ در دستگاه اول و مختصات $(\theta',0)$ در دستگاه دوم باشد، درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$\cos\delta'\cos(\alpha'-\theta) = \cos\delta\cos(\alpha-\theta)$$
$$\cos\delta'\sin(\alpha'-\theta) = \sin\delta\sin i + \cos\delta\cos i\sin(\alpha-\theta)$$
$$\sin\delta' = \sin\delta\cos i - \cos\delta\sin i\sin(\alpha-\theta)$$

اگر $\alpha = 75^\circ, \delta = 15^\circ, \theta = 215^\circ, \theta' = 115^\circ$، و $i = 23^\circ 30'$ باشد از معادلات اخیر نشان دهید که $\alpha' = 327^\circ 12'$ و $\delta' = 29^\circ 0'$ است.

۲۰. نشان دهید که اگر a ارتفاع ستارهٔ قطبی، H زاویهٔ ساعتی و p فاصلهٔ قطبی آن (برحسب ثانیهٔ قوسی) باشد، عرض جغرافیایی به تقریب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\phi = a - p\cos H + \frac{۱}{۲}p^{۲}\sin^{۲}H\tan a\sin ۱''$$

۲۱. یک جرم آسمانی (به میل δ) در فاصلهٔ زاویه‌ای کوچک H از دایرهٔ نصف النهار قرار دارد. ثابت کنید که فاصلهٔ سمت الرأسی z به تقریب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$z = \phi - \delta + \alpha_{۱} - \alpha_{۲}$$

که در آن α_1 (برحسب دقیقهٔ قوسی) با رابطهٔ زیر داده شود

$$\alpha_{۱} = \frac{۲\cos\phi\cos\delta}{\sin(\phi-\delta)}\sin^{۲}\frac{H}{۲}\operatorname{cosec}۱'$$

و

$$\alpha_{۲} = \frac{۱}{۲}\alpha_{۱}^{۲}\cot(\phi-\delta)\sin ۱'$$

۲۲. اگر در محلی به عرض جغرافیایی ϕارتفاع خورشید در قائم مبدأ a و طول سماوی آن L باشد، ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\phi = \sin^{-۱}(\sin L\sin\varepsilon\operatorname{cosec} a)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۲۳. ثابت کنید که در عرض جغرافیایی ٤٥° بازهٔ زمانی بین لحظه‌ای که سمت یک ستاره ۹۰° شرقی است و لحظه‌ای که این ستاره غروب می‌کند، مقدار ثابتی است.

۲٤. اگر δ میل یک ستاره و A سمت بیشینهٔ آن باشد نشان دهید که سمت ستاره، در t ثانیهٔ زمانی از لحظه‌ای که سمت آن A است، به اندازهٔ $(۱/۲)۱٥^{۲}t^{۲}\sin ۱''\sin^{۲}\delta\tan A$ ثانیهٔ قوسی تغییر می‌کند.

۲٥. اگر η زاویهٔ اختلاف منظر و δ ϕ مقادیر ثابتی باشند،درستی روابط زیر را ثابت کنید.

(الف) $$\frac{d\eta}{dH} = -\cos\phi\cos A\operatorname{cosec} z$$

$$\frac{d^{2}z}{dH^{2}}=\frac{d\eta}{dH}\cos\delta\cos\eta$$ (ب

$$\frac{d^{2}A}{dH^{2}}=-\frac{\cos\delta}{\sin^{2}z}\left(\cos z\cos\eta\frac{dz}{dH}+\sin z\sin\eta\frac{d\eta}{dH}\right)$$ (ج

۲۶. اگر H زاویهٔ ساعتی ستاره‌ای در لحظهٔ طلوع آن باشد، نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tan^{2}\frac{H}{2}=\frac{\cos(\phi-\delta)}{\cos(\phi+\delta)}$$

۲۷. در محلی به عرض شمالی ϕ، دو ستارهٔ A و B (به ترتیب با میل های δ و δ_1) به طور همزمان طلوع می‌کنند و در موقع غروب ستارهٔ B، ستارهٔ A در حال عبور است. رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\tan\phi\tan\delta=1-2\tan^{2}\phi\tan^{2}\delta_{1}$$

۲۸.اگر دو ستارهٔ (α,δ)و (α_1,δ_1) در محلی به عرض جغرافیایی ϕ در یک لحظه طلوع کنند، نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\cot^{2}\phi\sin^{2}(\alpha_{1}-\alpha)=\tan^{2}\delta+\tan^{2}\delta_{1}-2\tan\delta\tan\delta_{1}\cos(\alpha_{1}-\alpha)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۲۹. در محلی به عرض جغرافیایی ϕ مشاهده می‌شود که خورشید h ساعت قبل از ظهر ظاهری و در روز بعد m دقیقه دیرتر طلوع می‌کند. میل آن در روز اول برابر δ است. نشان دهید که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ طلوع به دقیقهٔ قوسی چنین است

$$15m\cos^{2}\delta\,\mathrm{cosec}\,\phi$$

[آزمون کالج]

۳۰. اگر شفق زمانی پایان یابد که مرکز خورشید 18° زیر افق رفته است، نشان دهید که مدت شفق در استوا بر حسب ساعت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\frac{12}{\pi}\sin^{-1}(\sin 18^{\circ}\sec\delta)$$

با استفاده از این فرمول‌ها مدت شفق را در انقلاب، تابستانی محاسبه کنید.

[لندن، ۱۹۳۰]

۳۱. نشان دهید که در محلی به عرض جغرافیایی ϕ کوتاهترین مدت شفق بر حسب ساعت برابر است با

$$\frac{۲}{۱۵}\sin^{-۱}\left(\sin ۹^{\circ} \sec\phi\right)$$

که در آن $\sin^{-۱}\left(\sin ۹^{\circ} \sec\phi\right)$ به درجه بیان می‌شود.

[نجوم کروی تألیف بال]

۳۲. اگر آغاز و پایان شفق هنگامی باشد که خورشید ۱۸° زیر افق است. نشان دهید تا زمانی که مقدار عددی میل خورشید کمتر از ۱۸° است در همهٔ محل‌ها روزی وجود دارد که مدت آن، با در نظر گرفتن شفق، بیشتر از ۱۲ ساعت است.

۳۳. اگر آغاز و پایان روز هنگامی در نظر گرفته شود که خورشید به اندازهٔ زاویهٔ θ زیر افق است. نشان دهید که اگر عرض جغرافیایی کمتر از ϕ یی باشد که از رابطهٔ $\sin\phi = \sin\varepsilon \sin\theta$ به دست می‌آید، در این صورت کوتاهترین روز در انقلاب زمستانی وجود نخواهد داشت. در این رابطه، εزاویه دایرهٔ البروج است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۷]

۳٤. به فرض اینکه خورشید به طور یکنواخت روی دایرهٔ البروج حرکت کند و یک دور کامل را در ۳٦۵ روز به پایان برساند، نشان دهید که در محلی به عرض جغرافیایی ϕ تعداد شب‌هایی که شفق حتی در نیمه شب وجود دارد عدد صحیح بعد از

$$\frac{۷۳}{۳٦}\cos^{-۱}\left\{\cos\left(\phi + ۱۸^{\circ}\right)/\sin\varepsilon\right\}$$

است؛ آغاز یا پایان شفق را هنگامی بگیرید که خورشید 18° زیر افق است.

۳۵. اگر θمقدار انخفاض خورشید درزیر افق در پایان شفق باشد و η', η به ترتیب زاویه‌های اختلاف منظر در پایان شفق و در موقع غروب باشند، ثابت کنید که مدت شفق (T) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$۲\sin^{۲}\frac{T}{۲}\cos^{۲}\phi = ۱ - \cos\theta\cos\left(\eta' - \eta\right)$$

۳۶. بُعد ستاره‌ای 5^h49^m، میل آن $+7°23'$، و زاویهٔ میل دایرهٔ البروج $23°27'$است. نشان دهید که طول و عرض سماوی این ستاره به ترتیب برابرند با $87°10'$و $-16°2'$.

۳۷. دو ستارهٔ (α_1, δ_1)و (α_2, δ_2) دارای یک طول سماوی اند، تساوی زیر را ثابت کنید

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \tan\varepsilon(\cos\alpha_1 \tan\delta_2 - \cos\alpha_2 \tan\delta_1)$$

۳۸. ستاره‌ای به بُعد α و میل δ دارای عرض سماوی کوچک β است. ثابت کنید که وقتی بعد خورشید α است، طول سماوی خورشید تقریباً $\beta \sin\delta \cot\alpha$ با طول سماوی ستاره اختلاف دارد.

۳۹. نشان دهید که زاویه میل دایرهٔ البروج را می‌توان با اندازه گیری میل δ خورشید در ظهری نزدیک به انقلاب تابستانی و با استفاده از فرمول $\varepsilon = \delta + q^2 \sin 2\delta$ تعیین کنید. در این رابطه q نصف زاویهٔ متمم بُعد خورشید است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲٤]

٤۰. قطب راه شیری در بُعد 12^h48^m و میل $+27°$است. خورشید تقریباً در چه تاریخ‌هایی از راه شیری عبور می‌کند؟ (زاویهٔ میل دایرهٔ البروج $23°27'$ است).

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۵]

٤۱. ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی یک تغییر مکان کوچک، به اندازهٔ dr، به طرف نقطهٔ O به مختصات (α_0, δ_0)انجام می‌دهد. نشان دهید که تغییرات حاصل در مختصات استوایی ستاره (α, δ) از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\cos\delta d\alpha = \cos\delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \operatorname{cosec}\alpha\, r\, dr$$
$$d\delta = [\cos\delta_0 \sin\delta \cos(\alpha - \alpha_0) - \sin\delta_0 \cos\delta] \operatorname{cosec} r\, dr$$

که در آن r طول کمانی است که ستاره و نقطهٔ O را روی کرهٔ سماوی به هم می‌پیوندد.

[گلاسکو، ۱۹۷٤]

٤۲. ثابت کنید که فاصلهٔ سمت الرأسی z قطب شمال دایرهٔ البروج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$z = \cos^{-1}(\cos\varepsilon \sin\phi - \sin\varepsilon \cos\phi \sin T)$$

در این رابطه ε زاویهٔ میل دایرهٔ البروج، ϕ عرض جغرافیایی راصد، و Tزمان نجومی محلی است.

فصل ۵

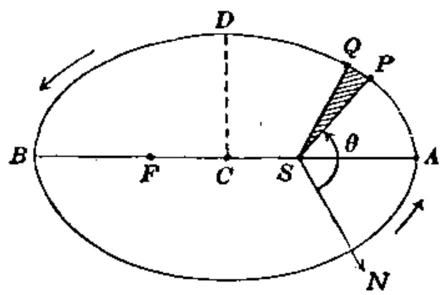
حرکت های سیارات

٥٦. مقدمه[1]

نه سیارهٔ بزرگ به ترتیب فاصله از خورشید عبارت اند از عطارد (تیر)، زهره (ناهید)، ارض (زمین)، مـریخ (بهـرام)، مشـتری (برجیس)، زحل (کیوان)، اورانوس، نپتون، و پلوتون. قوانینی که بر حرکت سیارات نسبت به خورشـید حـاکم اسـت توسـط یوهانس کپلر (١٠٠٩–٩٥٠)/(١٦٣٠–١٥٧١) کشف شدند. نیم قرن بعد ایزاک نیوتـون (١١٠٦– ١٠٢١)/ (١٧٢٧–١٦٤٢) ثابـت کرد که قوانین سه گانهٔ کپلر را می توان از قانون جهانی گرانش که او در سال ١٦٨٧/١٠٦٦ در اصول بیان کرد، به دست آورد. بررسی کامل حرکت سیارات مربوط به نجوم دینامیکی است و از این رو در این کتاب وارد بحث آن نمـی شـویم. امـا اگـر بخواهیم بعضی مسائل را که با نجوم کروی وابستگی نزدیکتری دارند به طور روشن درک کنیم، بررسی برخی اصول و نتایج مربوط به حرکت سیارات و به ویژه حرکت زمین ضروری است.

٥٧. قانون اول کپلر

بنابه قانون اول کپلر مسیر یا مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید بیضی است و خورشید در یکی از کـانون هـای بیضـی قرار دارد. شکل ٤٥ یک بیضی را نشان می دهد که در آن S و F دو کانون و C مرکز (نقطهٔ میـانی بـین S و F) و AB محـور بزرگ است. فرض کنید خورشید در S



شکل۴۵

[1]- در این فصل برحسب زمان زیجي (ET) بیان مي شود؛ پیوست ٥ را نگاه کنید.

است و سیاره در جهت پیکان ها بیضی را طی کند. سیاره در A در نزدیک ترین فاصله نسبت به خورشید قرار دارد؛ بنابراین می گوییم که سیاره در حضیض است. در B سیاره دورترین فاصله را از خورشید دارد و بنابراین مـی گـوییم سـیاره در اوج است. CA نیم محور بزرگ است و طول آن با a نشان داده می شود. CD که عمود بر CA رسم شده، نیم محور کوچک است و با b نشان داده می شود نسبت CS:CA خروج از مرکز خوانده می شود و ما آن را با e نشان می دهیم. نیم محـور کوچـک b را می توان با فرمول زیر بر حسب a و e بیان کرد.

$$b^{۲} = a^{۲}(۱-e^{۲}) \qquad (۱)$$

فاصلهٔ حضیض SA برابر $a(۱-e)$، و فاصلهٔ اوج SB برابر $a(۱+e)$ است. اگر P مکـان سـیاره روی مـدارش باشـد SP بردار شعاعی نامیده می شود و با T نشان داده می شود. این فاصلهٔ SP فاصلهٔ خورشید مرکزی سیاره، یعنی فاصـلهٔ سـیاره از خورشید است. فرض کنید SN یک جهت مرجع در صفحهٔ مدار باشد. در این صورت مکان P به وسیلهٔ بـردار شـعاعی T و زاویهٔ θ که SP با SN می سازد مشخص می شود؛ زاویهٔ θ در جهت حرکت سیاره انـدازه گیـری مـی شـود. فـرض کنیـد هنگامی که سیاره در حضیض یعنی در A قرار دارد، ω مقدار θ باشد به طوری که $N\hat{S}A = \omega$ است. می دانیم که معادلـه ی بیضی به صورت زیر است

(۲)

$$r = \frac{p}{۱ + \dot{e}\cos(\theta - \omega)}$$

که در آن جانشانی زیر انجام شده است

(۳)

$$p = b^{۲}/a = a(۱-e^{۲)}$$

زمانی که لازم است تا سیاره مدارش را طی کند به دوره معروف است و با τ نشان داده می شود. دوره ی مداری زمین یـک سال است که فعلاً $۳۶۵\frac{۱}{٤}$ روز متوسط خورشید گرفته می شود.

٥٨. قانون دوم کپلر

قانون دوم کپلر می گوید بردار شعاعی sp (٤٥) در زمان های مساوی مساحت های مساوی را جاروب می کند. فرض کنید p مکان سیاره در لحظه ی tوQ مکان آن را در لحظه ی $t+\Delta t$ نشان دهد. اگر $t+\Delta t$ بردار شعاعی SQ و $\theta+\Delta\theta$ زاویهٔ QSN را نشان دهد، در این صورت $Q\hat{S}P=\Delta\theta$ است. اگر $\Delta\theta$ به حد کافی کوچک باشد کمان PQ را می توان یک خط راست گرفت و مساحت جاروب شده در زمان بینهایت کوچک $\Delta\tau$ برابر با مساحت مثلث QSP است، یعنی $1/2_{\gamma}(T+\Delta r)\sin\Delta\theta$ که با دقت کافی برابر $\Delta\theta$ $1/2_{r^2}$می شود. آهنگ پیمایش مساحت برابر است با عبارت اخیر تقسیم بر Δt. چون طبق قانون دوم کپلر این آهنگ ثابت است. می توانیم بنویسیم

$$t^{2}\frac{d\theta}{dt}=h \qquad (4)$$

که در آن h ثابت و دو برابر آهنگ پیمایش مساحت به وسیلهٔ بردار شعاعی است. در این صورت مساحت کل بیضی برابر πab است که طبق تعریف در دورهٔ T پیموده می شود.

از این رو داریم

$$\frac{2\pi ab}{T}=H \qquad (5)$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (١)، داریم

$$\frac{2\pi a^{2}(1-e^{2})^{\frac{1}{2}}}{T}=H \qquad (6)$$

بردار شعاعی در مدت T یک زاویهٔ ٣٦٠ یا 2π جاروب می کند. اگر n آهنگ متوسط پیمایش این زاویه به وسیلهٔ بردار شعاعی باشد، در این صورت داریم

$$n=2\pi/T \qquad (7)$$

n حرکت زاویه ای میانگین سیاره نامیده می شود. بردار شعاعی در رفتن از SP به SQ، زاویهٔ $\Delta\theta$ را در مدت $\Delta\tau$ جاروب می کند. پس سرعت زاویه ای در P برابر $d\theta/d\tau$ است و بنابراین،n مقدار میانگین $d\theta/d\tau$ برای همهٔ نقاط مدار است. با کمک رابطهٔ (٧) می توان فرمول (٦) را به صورت زیر نوشت.

$$na^{2}(1-e^{2})^{\frac{1}{2}} = h \quad (8)$$

۵۹–قانون سوم کپلر

قانون سوم کپلر به بیان ریاضی به شرح زیر است. فرض کنید a و a_1 نیم محورهای بزرگ دو مدار سـیاره ای و τ_1, τ دوره های مداری آن‌ها باشند. در این صورت طبق قانون سوم داریم

$$\frac{a^{3}}{T^{2}} = \frac{a_1^{3}}{T_1^{2}} \quad (9)$$

یا، با استفاده از رابطه ی (۷) (داریم)

$$n^{2}a^{3} = n_1^{2}a_1^{3} \quad (10)$$

که در آن n η_1 حرکت های زاویه ای میانگین در این دو مدارند.

از رابطه ی (۹) نتیجه می شود

$$\frac{a^{1}}{a} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

$$\frac{a_1}{a} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{2}{3}}$$

اگر a و T مربوط به مدار زمین به دور خورشید باشند، وقتی دوره ی مداری T۱ از سیاره ی P۱ بر حسب سال معلوم باشـد نسبت نیم محور بزرگ مدار آن سیاره به نیم محور بزرگ مدار زمین از رابطه ی (۱۱) به دست می آید، زیـرا T بـرای زمـین یک سال است. دوره ی مداری سیاره‌ها از طریق رصد (بخش ۸۰ را ببینید) معلوم می شـوند و از ایـن رو نـیم محـور هـای بزرگ آن‌ها را می توان بر حسب a به عنوان واحد نجومی فاصله شناخته می شود. بـا قـرار دادن $\tau = 1$ در رابطـه ی (۱۱)، τ_1 بر حسب سال به دست می آید و داریم

$$a_۱ = (T_۱)^{\frac{۲}{۳}} AU$$

٦٠. قانون گرانش نیوتون

این قانون به صورت زیر بیان می شود. هر ذره ی ماده، هر ذره ی دیگر ماده را با نیرویی متناسب با حاصلضرب جرم های دو ذره و عکس مجذور فاصله ی میان آنها جذب می کند. بیان ریاضی این قانون به صورت زیر است

$$F = G\frac{mm_۱}{r^۲} \qquad (۱۲)$$

که در آن m و m۱ جرم های ذرات، r فاصله ی میان آن ها، F نیروی گرانشی جاذبه، و G یک مقدار ثابت موسوم به ثابت گرانش است. مقدار G در دستگاه یکاهای cgs برابر 6.670×10^{-8} است، یعنی نیروی جاذبه میان دو ذره، هر یک به جرم یک گرم که به فاصله ی ۱ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند $۶/۶۷۰\times۱۰^{-۸}$ دین است. برای منظور فعلی می توانیم خورشید و سیارات را «ذره» در نظر بگیریم.

اعمال قانون گرانش (۱۲) در حرکت یک سیاره به دور خورشید، به سه قانون کپلر می انجامد.

فرض کنیدM وm به ترتیب جرم های خورشید و یک سیاره باشند و μطبق رابطه ی زیر تعریف شود.

$$\mu = G(M+m) \qquad (۱۳)$$

در این رابطه (٤) به صورت زیر به دست می آید در این صورت معلوم می‌شود که ثابت

$$h^۲ = ۳P = ۲a(۱-e^۲) \qquad (۱٤)$$

اما، با استفاده از رابطه ی (۸) داریم،

$$h^۲ = n^۲a^۲(۱-e^۲)$$

از این رو

$$n^۲a^۲ = \mu \equiv G(M+m) \qquad (۱۵)$$

در مورد سیاره ای دیگر، داریم

$$n_1^2 a_1^3 = \mu_1 \equiv G(M + m_1) \tag{١٦}$$

از این رو، از رابطه ی (١٥) و (١٦) خواهیم داشت

$$\frac{n^2 a^2}{n_1^2 a_1^3} = \frac{M + m}{M = m_1}$$

یا با استفاده از رابطه ی (٧)، نتیجه می شود

$$\frac{m^2 a^3}{n^2 a_1^3} = \frac{M + m}{M = m_1} \times \frac{T^2}{T_1^2} \tag{١٧}$$

معادله ی (١٧) شکل صحیح قانون سوم کپلر را که در نمادگذاری ما با رابطه ی (٩) بیان شده بود به دست می دهد. در واقع جرم یک سیاره در مقایسه با جرم خورشید بسیار کوچک و کمیت $M + m / M + m_1$ در رابطه ی (١٧) خیلی نزدیک به یک است؛ در نتیجه قانون سوم کپلر هر چند از دقت زیادی برخوردار نیست، یک تقریب خیلی خوب است.

٦١. جرم سیاه ها

فرمول های بخش پیش محاسبه ی جرم هر سیاره ای را که یک قمر یا بیشتر دارد، بر حسب کسری از جرم خورشید، به دست می دهند. اگر T, a, m مقادیر مربوط به زمین باشند با استفاده از روابط (٧) و (١٥) داریم

$$G(M = m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \tag{١٨}$$

در این صورت حرکت یک قمر به دور یک ستاره توسط همان قوانین حرکت سیاره به دور خورشید تعیین می شود. در مورد قمر، سیاره جسم کنترل کننده است و اگر m١و m^1 به ترتیب جرم های سیاره و قمر، a١ نیم محور بزرگ مدار قمر به دور سیاره، و T_1 دوره ی مداری آن باشد، قانون گرانش نیوتون به معادله ای شبیه به رابطه ی (١٨) می انجامد که به صورت زیر است

$$g(m_1 + m') = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} \tag{١٩}$$

از این رو، با استفاده از روابط (١٨) و (١٩)، داریم

$$\frac{m_1 + m'}{M + m} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \qquad (20)$$

حال چون جرم m' قمر در مقایسه با جرم m_1سیاره کوچک است، می توانیم در روابط (١٩) و (٢٠) از m' چشم ببوشیم. همین طور می توانیم از جرم زمین m در مقایسه با جرم خورشید M صرف نظر کنیم. پس رابطه ی (٢٠) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{m_1 + m^1}{M + m} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \qquad (21)$$

فرض می کنیم نیم محور بزرگ a_1 مدار قمر برحسب واحد نجومی و دوره ی T_1آن نیز بر حسب سال در دست باشد. در اینصورت در رابطه ی (٢١)، $a = 1AU$ و $T = 1Y$ است و بنابر این نسبت m_1 (جرم سیاره) به M (جرم خورشید) تعیین می شود.

به عنوان مثال جرم مریخ را (بر حسب جرم خورشید) از اجزای مداری قمر دیموس پیدا خواهیم کرد. نیم محور بزرگ مدار دیموس به دور مریخ٠/٠٠٠١٥٦٩٥ واحد نجومی است؛ دوره ی آن ١,٢٦٢٤٤ را روز یا $\frac{1}{2}$٤٦٥ / ١.٢٦٢٤٤ را سال است.

از این رو از رابطه ی (٢١) داریم

$$\frac{m_1}{m} = (0/00015695)^3 \times \frac{\left(365\frac{1}{4}\right)^2}{(1/26244)^2}$$
$$= \frac{1}{3/09 \times 10^6}$$

یعنی جرم خورشید اندکی بیش ازسه میلیون برابر جرم مریخ است.

٦٢. اختلال های عناصر مداری

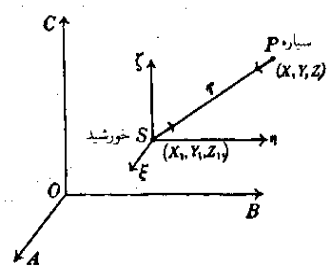
تا کنون فرض می کردیم که مسیر یک سیاره به دو خورشیدفقط با جاذبه ی گرانشی متقابل سیاره و خورشید تعیین می شود. اما هر سیاره، یا هر جسم دیگر، در منظومه ی شمسی یک جاذبه گرانشی به سیاره ی مورد نظر وارد می کندو اثر های آن‌ها به صورت تغییرات کوچکی در عناصر مداری سیاره، چون نیم محور بزرگ a و خروج از مرکز e آن نمایان می شوند. چنین

تغییراتی که معمولاً کوچک اند به اختلال های عناصر مداری معروف اند. بزرگی اختلال ناشی از هر سیاره ی مختل کننده، جز چیزهای دیگر، به جرم آن سیاره بستگی دارد و بدین ترتیب ممکن است جرم های سیاره های بی قمر را با استفاده از فرمول های نجومی دینامیکی و رصد به دست آورد. با این روش، جرم های عطارد و زهره (که قمر ندارند) به دست می آیند. البته، این دو سیاره توسط کاوه های فضایی بازدید شده اند و در مدتی که کاوه، از نزدیکی سیاره می گذرد در واقع برای سیاره یک ماهواره ی مصنوعی محسوب می شود. بنابر این با به کار بردن روشی که با روش بخش ٦١ اندکی تفاوت دارد، می توان مقدار خیلی دقیق تری برای جرم سیاره به دست آورد.

٦٣. اصول دینامیکی حرکت مداری

فرض کنید sوp مکان های خورشید و یک سیاره در هر لحظه t باشند و مختصات این دو نسبت به محور های راستگوشه ی بی شتاب oc, ob, oa در فضا به ترتیب و (X_1, Y_1, Z_1) و(X,Y,Z) باشد (شکل ٤٦). اگر جرم های خورشید و سیاره M,m باشند در این صورت طبق قانون گرانش نیوتون سیاره ی p با نیرویGMm/r^2، که در آن r فاصله‌ی sp است، به طرف s جذب می شود. مؤلفه ی این نیرو در جهت مثبت محور OA چنین است

$$-\frac{GMm(x-x_1)}{r^2} \text{ یا } \frac{GMm}{r^2}\frac{(x-x_1)}{r}$$



شکل۴۶

اگر $\ddot{x}(\equiv d^2x/dt^2)$ مولفه ی موازی با oA شتاب سیاره ی p را نشان می دهد، طبق قانون دوم حرکت نیوتون داریم

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm(X-X_1)}{r^2} \tag{٢٢}$$

حال جاذبه ی گرانشی متقابل است و خورشید s نیز با نیروی$GMm/r^{۲}$ به طرف p جذب خواهد شد و مؤلفه ی موازی با OA. این نیرو عبارت است از

$$\frac{GMm}{r^{۲}} \times \frac{(X - X_{۱})}{r}$$

اگر $\ddot{X}_1$ مؤلفه ی موازی با OA شتاب خورشید باشد، مانند گذشته داریم

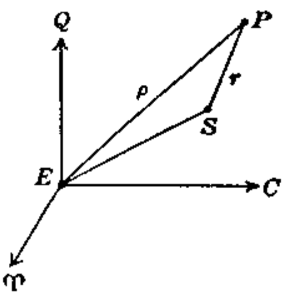
$$M\ddot{X}_{۱} = \frac{GMm(X - X_{۱})}{r^{۳}} \tag{۲۳}$$

از تقسیم رابطه ی (۲۲) بر m و رابطه ی (۲۳) بر M و تفریق معادلات حاصل، رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$\ddot{X} - \ddot{X}_{۱} = -G(M + m)\frac{(X - X_{۱})}{r^{۳}} \tag{۲٤}$$

دو معادلهٔ مشابه نیز برای Y و Z وجود دارند.

اگر بنویسیم $\xi = X - X_1$ ،$\eta = Y - Y_1$ ،$\varsigma = Z - Z_1$ در این صورت (ξ, η, ς).



شکل۵۲

فرض کنید مختصات سیارهٔ P نسبت به محور های راستگوشه ای هستند که از خورشید می گذرند. اگر، طبق رابطهٔ (۱۳)، در رابطهٔ (۲٤) μ را به جای G(M+m) بگذاریم خواهیم داشت.

$$\ddot{\xi} + \frac{\mu\xi}{r^{۳}} = ۰ \tag{۲۵}$$

همین طور خواهیم داشت.

$$\ddot{\eta}+\frac{\mu\eta}{r^{۳}}=۰ \qquad (۲۶)$$

$$\ddot{\varsigma}+\frac{\mu\varsigma}{r^{۳}}=۰ \qquad (۲۷)$$

این‌ها معادلات حرکت سیاره ی p نسبت به خورشیدند.

رابطه ی (۲۶) را در ς و رابطه ی(۲۷)را در η ضرب می کنیم و از هم کم می کنیم. نتیجه می شود

$$\varsigma\ddot{\eta}-\eta\ddot{\varsigma}=۰$$

یعنی

$$\frac{d}{dt}(\varsigma\dot{\eta}-\eta\dot{\varsigma})=0$$

با گرفتن انتگرال داریم

$$\varsigma\dot{\eta}-\eta\dot{\varsigma}=A \qquad (۲۸)$$

که در آن A ثابت انتگرال گیری است.

به روش مشابهی از روابط (۲۵) و (۲۷) و سپس از روابط (۲۵) و (۲۶) روابط زیر را به دست می آوریم

$$\varsigma\dot{\xi}-\varsigma\dot{\xi}=b \qquad (۲۹)$$

$$\eta\dot{\xi}-\xi\dot{\eta}=C \qquad (۳۰)$$

که در آن‌ها BوC ثابت های انتگرال گیری اند.

روابط (۲۸) و (۲۹) و (۳۰) را به ترتیب در ξ,η,ς ضرب و با هم جمع می کنیم. در این صورت داریم

$$A\xi+B\eta+C\varsigma=0 \qquad (۳۱)$$

که معادله ی یک صفحه است که از مبدأ مختصات ξ,η,ς یعنی از خورشید، S، می گذرد و تعبیر آن این است که چون مختصات(ξ,η,ς) سیاره ی P در رابطه ی (٣١) صدق می کند حرکت آن نسبت به خورشید روی یک صفحه انجام می شود. این صفحهٔ همان صفحه مداری است.

٦٤. معادله ی مدار

اکنون حرکت سیاره را می توانیم به دو محور که از خورشید می گذرند و در صفحه ی مداری قرار دارند نسبت دهیم. فرض کنید(x, y) مختصات سیاره نسبت به این محورها باشد. فرض خواهیم کرد که SN، در شکل ٤٥، محور x است و محور y که البته در صفحه ی مدار قرار دارد بر SN عمود است. بنابراین معادلات حرکت سیاره عبارتند از

$$\ddot{x}+\mu\frac{x}{r^{3}}=0 \qquad (٣٢)$$

$$\ddot{y}+\mu\frac{y}{r^{3}}=0 \qquad (٣٣)$$

اکنون این معادلات از مختصات قائم به مختصات قطبی θ,r تبدیل خواهند شد. (در شکل ٤٥، $N\widehat{P}S=\theta, SP=r$ است). داریم.

$$y=r\sin\theta, x=r\cos\theta \qquad (٣٤)$$

فرض کنید αو β به ترتیب مؤلفه های شتاب سیاره یp در امتداد sp و در امتداد عمود بر آن باشند. در این صورت

$$a=\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta \qquad (٣٥)$$

و

$$\beta=\ddot{y}\cos\theta-\ddot{x}\sin\theta \qquad (٣٦)$$

از رابطه ی اول رابطه (٣٤) داریم

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\times\dot{\theta}$$

و (٣٧)

$$\ddot{x}=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\sin\theta\times\dot{\theta}-r\cos\theta\times\dot{\theta}^{2}-r\sin\theta\times\ddot{\theta}$$

عبارت مربوط به $\ddot{y}$ را می توان به روشی مشابه به دست آورد که عبارت است از

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + ۲\dot{r}\cos\theta \times \dot{\theta}^{۲} + \sin\Theta \times \Theta^{۲} r\cos\theta \times \ddot{\theta} \qquad (۳۸)$$

با قرار دادن مقادیر $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ از روابط (۳۷) و (۳۸) در رابطهٔ (۳۵) و پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$\alpha = \ddot{r} - r\Theta^{۲} \qquad (۳۹)$$

اما با استفاده از روابط (۳۲) و (۳۳) داریم

$$\alpha \equiv \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta = -\frac{\mu}{r^{۳}}\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right)$$
$$= -\frac{\mu}{r^{۲}}$$

از این رو، نتیجه می شود

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} = -\frac{\mu}{r^{۲}} \qquad (۴۰)$$

به روشی مشابه رابطهٔ زیر به دست می آید

$$\beta = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = ۰$$

اما داریم

$$۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{۱}{r}\frac{d}{dt}\left(r^{۲}\theta\right)$$

از این رو، رابطهٔ زیر برقرار است

$$\frac{d}{dt}\left(r^{۲}\theta\right) = ۰$$

و با انتگرال گرفتن خواهیم داشت

$$r^{2}\dot{\theta} = h \qquad (41)$$

که در آن h ثابت انتگرال گیری است. بدین ترتیب رابطهٔ (۴۱) بیان ریاضی قانون دوم کپلر است که قبلاً در بخش ۵۸ بررسی کردیم.

اکنون می توان معادلهٔ مسیر سیاره به دور خورشید را از روابط (۴۰) و (۴۱) به دست آورد؛ البته این معادله، رابطه ای میـان r و θ است. این کار با حذف t از رابطهٔ (۴۰) با استفاده از رابطهٔ (۴۱) عملی می شود؛ در این معادلات زمان فقط در ضـرایب دیفرانسیلی وجود دارد. برای سادگی می نویسیم

$$u = \frac{1}{r} \qquad (42)$$

به طوری که با استفاده از رابطهٔ (۴۱) داریم

$$\dot{\theta} = hu^{2} \qquad (43)$$

چون داریم

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^{2}}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^{2}}\frac{du}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$$

از این رو، با استفاده از رابطهٔ (۴۳) داریم

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$$

و

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{d\theta}(\dot{r})\times\frac{d\theta}{dt}\\ &= -hu^{2}\frac{d}{d\theta}\left(h\frac{du}{d\theta}\right)\end{aligned}$$

به طوری که

$$\ddot{r} = -h^{۲}u^{۲}\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}}$$

همچنین با به کار بردن رابطهٔ (٤٣) نتیجه می شود

$$r\dot{\theta}^{۲} = h^{۲}u^{۳} \qquad (٤٥)$$

از این رو رابطهٔ (٤٠) با استفاده از روابط (٤٤) و (٤٥) به صورت زیر در می آید

$$-h^{۲}u^{۲}\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} - h^{۲}u^{۳} = -\mu u^{۲}$$

یا

$$\frac{d^{۲}u}{d\theta} + u = \frac{\mu}{h^{۲}} \qquad (٤٦)$$

جواب عمومی معادلهٔ (٤٦) با رابطهٔ زیر داده می شود

$$u = \frac{\mu}{h^{۲}}\left[۱ + e\cos(\theta - \omega)\right] \qquad (٤٧)$$

که در آن e و ω دو ثابت اصلی انتگرال گیری اند. طبق معادلهٔ (٤٢) داریم

$$r = \frac{h^{۲}/\mu}{۱ + e\cos(\theta - \omega)} \qquad (٤٨)$$

اگر $p = h^2/\mu$ باشد یعنی، با استفاده از رابطهٔ (٣)، اگر

$$h^2 = \mu a\left(1 - e^2\right) \qquad (٤٩)$$

باشد که همان معادلهٔ (١٤) است که قبلاً بررسی شد، در این صورت معادلهٔ (٤٨) همان معادلهٔ (٢) یعنی معادلهٔ بیضی است. مشاهده می شود که ثابت انتگرال گیری e همان خروج از مرکز است.

باید گفته شود که معادلهٔ (٤٨) معادلهٔ کلی یک مقطع مخروطی است که ممکن است یکی از اشکال زیر را دارا باشد:

الف) بیضی، اگر $e<1$ باشد.

ب) سهمی، اگر $e=1$ باشد.

ج) هذلولی، اگر $e>1$ باشد.

هر چند (الف) موردی است که ما در این جا بیشتر با آن سر و کار داریم، اما تعمیم حرکت یک جسم تحت جاذبهٔ گرانشی خورشید به صورت های دیگر نیز باید مورد توجه قرار گیرد.

معادلهٔ (٤١) به طور ساده بیان ریاضی قانون دوم کپلر است. همچنین با تعریف حرکت زاویه ای میانگین n طبق رابطهٔ (٧) و با استفاده از روابط (٥)، (٧)، و (٤٩) به فرمول زیر دست می یابیم

$$n^2a^3 = \mu \equiv G(M+m)$$

که قبلاً داشتیم. بدین ترتیب از یگانه قانون گرانش، معادل های ریاضی قوانین سه گانهٔ کپلر را به دست آوردیم

٦٥. سرعت سیاره در مدارش

فرض کنید V سرعت سیاره در نقطهٔ P واقع در مدارش باشد (شکل ٤٧.) V در جهت مماس PT خواهد بود. مؤلفه هـای V عبارت اند از (الف) $\dot{r}$ در امتداد بردار شعاعی در جهت PR و (ب) $r\dot{\theta}$ در امتداد PL عمود بر بردار شـعاعی. بـدین ترتیـب داریم

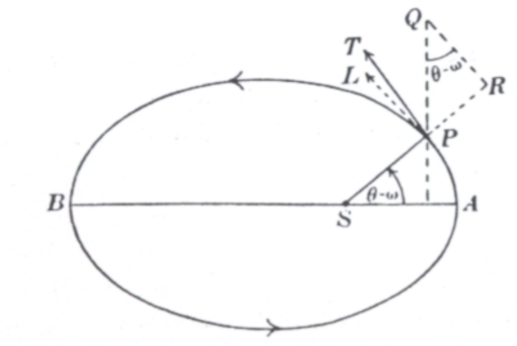
$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad (50)$$

اکنون داریم

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$$

و از رابطهٔ (٤٧) نتیجه می شود

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\mu}{h^2}e\sin(\theta-\omega)$$



شکل۴۷

به طوری که

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin(\theta - \omega) \qquad (۵۱)$$

همچنین چون $r^2\theta = h$ است داریم

$$r\dot{\theta} = hu = \frac{\mu}{h}\left[1 + e\cos(\theta - \omega)\right] \qquad (۵۲)$$

از این رو، با مجذور کردن روابط (۵۱) و (۵۲) و استفاده از رابطهٔ (۵۰) داریم

$$V^2 = \frac{\mu^2}{h^2}\left[1 + 2e\cos(\theta - \omega) + e^2\right]$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$V^2 = \frac{\mu^2}{h^2}\left[2 + 2e\cos(\theta - \omega) - \left(1 - e^2\right)\right]$$

یا با استفاده از رابطهٔ (٤٧) نتیجه می شود

$$V^2 2\mu u - \frac{\mu^2}{h^2}\left(1 - e^2\right)$$

اما از رابطهٔ (٤٩) داریم

$$h^{۲} = \mu a\left(۱ - e^{۲}\right)$$

از این رو، با قرار دادن ۱/r به جای u، رابطهٔ زیر به دست می آید

$$V^{۲} = \mu\left(\frac{۲}{r} - \frac{۱}{a}\right) \tag{٥٣}$$

این فرمول سرعت V را به صورت تابعی از بردار شعاعی r به دست می دهد.

از رابطهٔ (٥٣) دیده می شود که اگر r حداقل باشد، یعنی هنگامی که سیاره در حضیض است، V حداکثر است. در آن صورت r=a(۱-e) است و اگر V_1 سرعت سیاره در حضیض باشد نتیجه می شود

$$V_{۱}^{۲} = \frac{\mu}{a} \times \frac{۱+e}{۱-e} \tag{٥٤}$$

همین طور اگر r حداکثر باشد، یعنی هنگامی که سیاره در اوج است، سرعت حداقل است. اگر V_2 سرعت در اوج باشد، خواهیم داشت

$$V_{۲}^{۲} = \frac{\mu}{a} \times \frac{۱+e}{۱-e}\frac{۱-e}{۱+e} \tag{٥٥}$$

از روابط (٥٤) و (٥٥) داریم

$$V_1 V_2 = \frac{\mu}{a}$$

بدین ترتیب حاصل ضرب سرعت های خطی در حضیض و اوج از خروج از مرکز مدار مستقل است.

٦٦. مؤلفه های سرعت خطی عمود بر بردار شعاعی و محور بزرگ

اکنون قضیه ای را به دست می آوریم که بعداً در بررسی برخی مسائل مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در شکل ٤٧ فرض می کنیم که PR سرعت $\dot{r}$ معادل است با (الف) سرعتی در امتداد $\vec{PQ}$ که بزرگی آن با PQ نمایش داده می شود و (ب) سرعتی موازی با $\vec{QR}$ که بزرگی آن با QR نمایش داده می شود. حال $P\hat{S}A = \theta - \omega$ و از روی شکل $P\hat{Q}R = \theta - \omega$

است. از این رو، $PQ = PR\cos ec(\theta-\omega)$ و $QR = PR\cot(\theta-\omega)$ است. بدین ترتیب معلوم می شود که سرعت $\dot{r}$ با سرعت های زیر معادل است.

الف) $\dot{r}\cos ec(\theta-\omega)$ در امتداد PQ.

ب) $\dot{r}\cot(\theta-\omega)$ موازی با $\vec{QR}$.

حال سرعت V معادل است با $\dot{r}$ در امتداد PR و $r\dot{\theta}$ در امتداد PL، که PL خود بر SP عمود است. از این رو، V معادل است با

الف) $\dot{r}\cos ec(\theta-\omega)$ در امتداد PQ، یعنی عمود بر محور بزرگ و

ب) $r\dot{\theta}-\dot{r}\cot(\theta-\omega)$ در امتداد PL یعنی عمود بر بردار شعاعی.

از رابطهٔ (٥١) برای (الف) خواهیم یافت

$$\dot{r}\cos ec(\theta-\omega)=\frac{e\mu}{h} \qquad (٥٦)$$

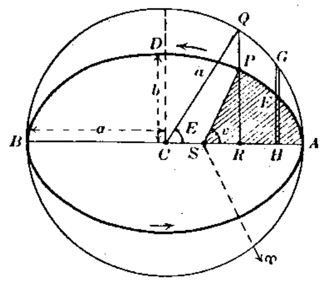
و همین طور، از روابط (٥١) و (٥٢) برای (ب) داریم

$$r\dot{\theta}-\dot{r}\cot(\theta-\omega)=\frac{\mu}{h} \qquad (٥٧)$$

بنابراین روابط (٥٧) و (٥٦) این نتیجه را بیان می کنند که سرعت V یک سیاره در هر نقطه از مدارش به یک سرعت ثابت μ/h عمود بر بردار شعاعی و یک سرعت ثابت $e\mu/h$ عمود بر محور بزرگ تجزیه می شود.

٦٧. بی هنجاری های واقعی و خروج از مرکزی

قانون دوم کپلر از دیدگاه نظری به ما امکان می دهد که در هر لحظه مکان یک سیاره را در مدارش محاسبهٔ کنیم؛ کافی است نیم محور بزرگ a، خروج از مرکز e، زمان گذشتن سیاره از حضیض



شکل۴۸

τ، و دورهٔ مداری T را بدانیم. در شکل ٤٨ فرض کنید P مکان سیاره در لحظهٔ t باشد. در مدت (τ t-) بردار شعاعی در حرکت از SA به SP مساحت هاشور خورده SPA را جاروب می کند. اکنون با استفاده از قانون دوم داریم

$$\frac{t-\tau}{T} = \frac{\text{مساحت SPA}}{\text{مساحت بيضي}}$$

یعنی

$$\text{مساحت SPA} = \frac{\pi ab(t-\tau)}{T}$$

یا، با معرفی حرکت زاویه ای میانگین n $(n = 2\pi / T)$، می توانیم بنویسیم

$$\text{مساحت SPA} = \frac{1}{2} nab(t-\tau) \qquad (٥٨)$$

که در آن b از رابطهٔ $b^2 = a^2(1-e^2)$ به دست می آید. بدین ترتیب اگر در یک لحظهٔ معین t کمیت های τ,e,a و n معلوم باشند می توانیم طرف راست رابطهٔ (٥٨) را محاسبه کنیم. از این رو، مساحت SPA محاسبه و مکان سیاره روی مدارش تعیین می شود.

هر چند این روش از دیدگاه نظری ساده می نماید، اما در عمل نامناسب است. اکنون فرمول هایی که معمولاً برای تعیین مکان یک سیاره در مدارش به کار می روند را به دست خواهیم آورد.

فرض کنید بردار شعاعی SP زاویه v را با SA بسازد؛ v موسوم به بی هنجاری واقعی است و آشکارا با θو ωرابطهٔ زیر را دارد.

$$v = \theta - \omega \qquad (٥٩)$$

دایره ای به قطر محور بزرگ AB رسم می کنیم؛ شعاع آن برابر با A است. اگر RP را از P عمود بر AB رسـم کنـیم و آن را ادامه دهیم تا این دایره را در Q قطع کند، در این صورت زاویهٔ QCA را بی هنجاری خروج از مرکزی می نامند و با E نشان می دهند.

با استفاده از یک خاصیت معروف بیضی داریم

$$PR : QR = b : a \qquad (٦٠)$$

که در آن b نیم محور کوچک CD است.

چون PR=r sin u وQR=CQ sin E=a sin E است، از این رو از رابطهٔ (٦٠) نتیجه می شود.

$$T\ \sin u = b \sin E \qquad (٦١)$$

از طرف دیگر $SR = r\cos u$، و همچنین $SR = CR - CS = a\cos E - ae$. از این رو، داریم

$$r\cos v = a(\cos E - e) \qquad (٦٢)$$

رابطه (٦١) و (٦٢) را مجذور و با هم جمع می کنیم. سپس با قرار دادن $b^2 = a^2(1 - e^2)$، و پس از ساده کـردن، خـواهیم داشت

$$r\sin vT = a(١ - e\cos E) \qquad (٦٣)$$

دوباره داریم

$$\begin{aligned} ٢\tau\sin^{٢}\frac{\upsilon}{٢} &= \tau(١ - \cos\upsilon) \\ &= a(١ - e\ \cos E) - a(\cos E - e) \end{aligned}$$

که در آن از روابط (٦٣) و (٦٢) استفاده شده است، از این رو، داریم

$$٢r\sin^{٢}\frac{\upsilon}{٢} = a(١ + e)(١ - \cos E) \qquad (٦٤)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت

$$۲r\cos^{۲}\frac{\upsilon}{۲} = a(۱-e)(۱+\cos E) \qquad (٦۵)$$

رابطهٔ (٦٤) را بر رابطهٔ (٦۵) تقسیم می کنیم، در این صورت داریم

$$\tan^{۲}\frac{\upsilon}{۲} = \frac{۱+e}{۱-e}\times\frac{۱-\cos E}{۱+\cos E}$$

که از آن نتیجهٔ زیر به دست می آید

$$\tan\frac{\upsilon}{۲} = (\frac{۱+e}{۱-e})^{\frac{۱}{۲}}\tan\frac{E}{۲} \qquad (٦٦)$$

بدین ترتیب،با استفاده از روابط (٦۳) و (٦٦) می توان بردار شعاعی **r** و بی هنجاری واقعی **v** را برحسب بی هنجاری خروج از مرکزی E بیان کرد. اکنون معادلهٔ کپلر را با استفاده از آن می توان بی هنجاری خروج از مرکزی E را بر حسب کمیت های معلوم بیان کرد به دست می آوریم. بنابراین بی هنجاری خروج از مرکزی به صورت یک زاویهٔ میانجی در بحث نظری ما وارد می شود.

٦۸. معادلهٔ کپلر

از تعریف حرکت زاویه ای میانگین n چنین بر می آید که حاصلضرب $n(t-\tau)$ که در فرمول (۵۸) هست، نمایشگر زاویهٔ پیموده شده در مدت $(t-\tau)$ توسط یک بردار شعاعی است که با سرعت زاویه ای ثابت n حول S می چرخد. کمیت $n(t-\tau)$ را به عنوان بی هنجاری میانگین تعریف می کنیم و با M نشان می دهیم، به طوری که داریم

$$M = n(t-\tau) \qquad (٦۷)$$

از این رو با استفاده از رابطهٔ (۵۸)، مساحت SPA در شکل ٤۸ به صورت زیر در می آید.

$$\text{مساحت } SPA = \frac{۱}{۲}abM \qquad (٦۸)$$

اینک این مساحت را بر حسب بی هنجاری خروج از مرکزی E بیان می کنیم. سطح هاشور خوردهٔ SPA برابر است با مساحت مثلثPSR به اضافهٔ مساحت RPA. نخست مثلث PSR را در نظر می گیریم. مساحت آن برابر است با $۱/۲ SR\times PR$. اما داریم SR=CR-CS یا SR=acosE-ae. همچنین با استفاده از رابطهٔ (٦۰) داریم $PR=(b/a)QR$ و

بنابراین PR=bsinE . از این رو، مساحت مثلث PSR برابر $1/2ab\sin E(\cos E-e)$ است. اکنون مساحت RPA را در نظر می گیریم و آن را به نوار های عمود بر AB تقسیم می کنیم و آن‌ها را امتداد می دهیم تا دایرهٔ به قطر AB را قطع کنند. نوار FH را در نظر می گیریم. چون FH=(b/a)GH است، مجموع همهٔ نوارهای تشکیل دهندهٔ مساحت RPA برابر با b/a ضرب در مجموع نوارهای تشکیل دهندهٔ مساحت QRA است، یا

$$\text{مساحت } RPA = \frac{b}{a}\times \text{مساحت } QRA \qquad (٦٩)$$

اما مساحت QRA برابر قطاع CQA منهای مساحت مثلث QCR است. چون $Q\hat{C}A = E$ است، مساحت CQA برابر $1/2a^2E$ و مساحت مثلث QCR برابر با $1/2a^2\sin E\cos E$ است. از این رو رابطهٔ (٦٩) به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned}\text{مساحت } SPA &= \frac{b}{a}[\frac{۱}{۲}a^{۲}E-\frac{۱}{۲}a^{۲}\sin E\cos E]\\ &= \frac{۱}{۲}ab(E-\sin E\cos E)\end{aligned}$$

با افزودن مساحت مثلث PSR که قبلاً پیدا کردیم به مساحت RPA خواهیم داشت

$$\text{مساحت } RPA = \frac{۱}{۲}ab(E-e\sin E) \qquad (۷۰)$$

بنابراین از روابط (٦٨) و (۷۰) نتیجه می شود.

$$E-e\sin E = M \equiv n(t-\tau) \qquad (۷۱)$$

این معادلهٔ کپلر است، رابطه‌ای بین بی هنجاری خروج از مرکزی E و بی هنجاری میانگین M. اگر M و e معلوم باشند، آن وقت تعیین مقدار E امکان پذیر است. از روش به دست آوردن رابطهٔ (۷۱) باید متوجه شویم که E و M هر دو باید در مقیاس دایره ای بیان شوند.

٦٩. حل معادلهٔ کپلر

روش کلی حل این معادله عبارت است از یافتن یک مقدار تقریبی برای E که تقریباً در معادله صدق کند. این کار با بازرسی معادله، یا با استفاده از جدول های ویژه، و یا با یکی از روش های ترسیمی متعددی که در زمان های مختلف ابداع شده اند، انجام می شود. فرض کنید این مقدار تقریبی $E_{۰}$ و مقدار واقعی آن $E_{۰}+\Delta E$ باشد. در این صورت به طور دقیق داریم.

$$(E_\circ + \Delta E_\circ) - e\sin(E_\circ + \Delta E_\circ) = M$$

یا

$$E_\circ + \Delta E_\circ - e\sin E_\circ \cos\Delta E_\circ - e\cos E_\circ \sin\Delta E_\circ = M$$

چون $\Delta E_\circ$ کوچک فرض می شود می توان به طور تقریب نوشت

$$\sin\Delta E_\circ = \Delta E_\circ \qquad \text{و} \qquad \cos\Delta E_\circ = 1$$

و نتیجه می شود

$$(E_\circ - e\sin E_\circ) + \Delta E_\circ(1 - e\cos E_\circ) = M$$

از آن جا که $E_\circ$ و e معلوم اند، می توانیم کمیت $M_\circ$ را از رابطهٔ زیر حساب کنیم

$$M_\circ = E_\circ - e\sin E_\circ \tag{۷۲}$$

در این صورت داریم

$$\Delta E_\circ = \frac{M - M_\circ}{1 - e\cos E_\circ} \tag{۷۳}$$

که از آن $\Delta E_\circ$ را می توان محاسبه کرد. آنگاه ($E_\circ + \Delta E_\circ$) مقدار دقیق تر E است و بنابراین می توان فرایند را، در صورت لزوم، با مقدار ($E_\circ + \Delta E_\circ$) به عنوان تقریبی جدید برای E تکرار کرد.

اگر خروج از مرکز کوچک (مثلاً کمتر از ۱ ر ۰) باشد از بازرسی معادلهٔ کپلر مقدار تقریبی بی هنجاری خروج از مرکزی را به دست می آوریم. زیرا، با چشم پوشی از جملهٔ esinE، برای تقریب نخست $E_\circ$ نتیجهٔ سادهٔ زیر حاصل می شود

$$E_\circ = M$$

و با به کار بردن رابطهٔ (۷۳) می توان مقدار دقیق تر بی هنجاری خروج از مرکزی را به دست آورد.

هنگامی که خروج از مرکز بزرگ باشد، به دست آوردن یک مقدار تقریبی برای بی هنجاری خروج از مرکزی که در معادلهٔ کپلر صدق کند کار چندان ساده ای نیست. در این شرایط استفاده از جدول های ویژه، از قبیل جدول های باوشینگر[1] یا

[1]. J.Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie (Leipzig ۱۹۰۱).

جدول های استراند،[1] یا یک ساخت ترسیمی محاسبات را خیلی آسان می کند. در جدول های باوشینگر، مقادیر E برای مقادیر مختلف خروج از مرکز e و بی هنجاری میانگین M جدول بندی شده اند؛ بنابراین با بازرسی یا با یک درون یابی ساده، می توان مقدار تقریبی خیلی خوبی برای $M_{\circ}$ به دست آورد. کاربرد رابطهٔ (۷۳) که قبلاً نشان داده شد در زیر می آید.

مثال. می خواهیم بی هنجاری خروج از مرکزی مریخ را ۲۰۰ روز بعد از گذشت از حضیض محاسبه کنیم. در این جا e=۰٫۰۹۳۳٤ و T=۱٫۸۸۰۹y معلوم اند.

حرکت زاویه ای میانگین n طبق تعریف عبارت است از $n = 2\pi / T$ که برابر است با ۱٫۸۸۰۹/ ۳٦۰ درجه در سال یا ۱۸۸٦٫۵۲ ثانیهٔ قوسی در یک روز متوسط خورشیدی. از این رو، داریم

M=۲۰۰×۱۸۸٦٫۵۲"=۳۷۷۳۰٤"=$104^{\circ}48'24''$

اگر از جملهٔ esinE در معادلهٔ کپلر چشم بپوشیم می توانیم به عنوان یک تقریب، بی هنجاری خروج از مرکزی $E_{\circ}$ را برابر 105° بگیریم (مقدار M به تقریب یک درجه).

اکنون مقدار $E_{\circ}$ را از رابطهٔ (۷۲)، یعنی از رابطهٔ زیر

$$M_{\circ} = E_{\circ} - e \sin E_{\circ}$$

محاسبه می کنیم. نخست توجه می کنیم که در این فرمول نظری، $M_{\circ}$ و $E_{\circ}$ الزاماً در مقیاس دایره ای بیان می شوند. اکنون اگر فرض کنیم که بر حسب ثانیهٔ قوسی بیان می شوند، داریم

$$M.\sin 1'' = E_{\circ} \sin 1'' - e \sin E_{\circ}$$

یا

$$M_{\circ} = E_{\circ} - e \sin E_{\circ} \operatorname{cosec} 1''$$
$$\log e = \bar{2}{,}97007$$
$$\log \sin E_{\circ}$$
$$\left(\equiv \log \sin 105^{\circ}\right) = \bar{1}{,}97007$$
$$\log \operatorname{cosec} 1'' = 5{,}31443$$

٤٫۲٦۹٤٤ که log ۱۸۵۹۷ است.

[1] J. J. Astrand, H*ü*lfstafcln (Leipzig, ۱۸۹۰)..

از این رو، داریم

$$M_{\circ} = E_{\circ} - ۱۸۵۹۷'' = ۱۰۵^{\circ} - ۵^{\circ}۹'۵۷''$$

یا

$$M_{\circ} = ۹۹^{\circ}۵۰'۳''$$

بنابراین فرمول (۷۳) در مورد $\Delta E_{\circ}$ به صورت زیر در می آید

$$\Delta E_{\circ} = \frac{۱۰۴^{\circ}۴۸'۲۴'' - ۹۹^{\circ}۵۰'۳''}{۱ - e\cos ۱۰۵^{\circ}}$$

ولی

$$e\cos ۱۰۵^{\circ} = -۰٫۰۹۳۳۴ \sin ۱۵^{\circ} = -۰٫۰۲۴۲$$

از این رو

$$\Delta E_{\circ} = \frac{۴^{\circ}۵۸'۲۱''}{۱٫۰۲۴۲} = \frac{۱۷۹۰۱}{۱٫۰۲۴۲} \text{(ثانیهٔ قوسی)}$$

$$= ۱۷۴۷۸''$$

$$= ۴^{\circ}۵۱'۱۸''$$

بنابراین نتیجه می شود

$$E_{\circ} + \Delta E_{\circ} = ۱۰۹^{\circ}۵۱'۱۸''$$

که مقدار دقیق تر بی هنجاری خروج از مرکزی است و در معادلهٔ کپلر صدق می کند. این فرایند را با فرض $۱۰۹^{\circ}۵۱'۱۸''$ به عنوان مقدار تقریبی E باید تکرار کنیم و آن را تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه دهیم. انجام این کار را به دانشجو واگذار مـی کنیم.

مقادیر زیر را از جدول های باوشینگر استخراج می کنیم:

e=۰٫۱	e =۰٫۰

M		
$M = ۱۰۴^\circ$	$E = ۱۰۹^\circ$ ر۴۰	$E = ۱۰۴^\circ$
$M = ۱۰۵^\circ$	$E = ۱۱۰^\circ$ ر۳۷	$E = ۱۰۵^\circ$

بدین ترتیب با یک درون یابی تقریبی، به ازای $M = 104^\circ 48'$ و $e =$ ۰ر۰93، مقدار 109° ر8 را بـرای $E_\circ$بـه دسـت مـی آوریم که نزدیک به نتیجهٔ محاسبهٔ نخست ماست. بدین ترتیب جدول ها، در این مثال، ما را از محاسبهٔ مقدار تقریبـی E بـی نیاز می کنند. اما در صورت برنامه ریزی محاسبهٔ تکراری دیگر نیازی به جدول‌ها نیست، زیـرا در هـر حـال ایـن فراینـد در نهایت همگرا خواهد شد.

۷۰. خلاصهٔ فرمول های حرکت بیضوی

اکنون فرمول های مهم حرکت بیضوی را که در صفحات پیش به دست آوردیم بازنویسی می کنیم

$$\left.\begin{array}{ll} r = \dfrac{a(۱-e^۲)}{۱+e\cos v} & \text{(الف)} \\ n^۲a^۳ = \mu \equiv G(M+m) & \text{(ب)} \\ h^۲ = \mu a(۱-e^۲) & \text{(ج)} \\ E - e\sin E = M \equiv n(t-\tau) & \text{(د)} \\ r = a(۱-e\cos E) & \text{(ه)} \\ \tan\dfrac{v}{۲} = \left(\dfrac{۱+e}{۱-e}\right)^{\frac{۱}{۲}}\tan\dfrac{E}{۲} & \text{(و)} \end{array}\right\} \quad (۷۴)$$

در این فرمول‌ها e,a و τ عنصر مدار بیضوی اند.

روش پیدا کردن مکان سیاره در مدارش در لحظهٔ t، با در دست داشتن عنصر های τ, e, a، و دورهٔ تنـاوب، بـه ترتیـب زیـر است:

۱. بی هنجاری خروج از مرکزی E را از فرمول (د) یا به روشی که در بخش ٦٩ شرح داده شد یا به طریق دیگر، محاسبه می کنیم
۲. بردار شعاعی r را از فرمول (هـ) محاسبه می کنیم.
۳. بی هنجاری واقعی v را با استفاده از فرمول (و) حساب می کنیم.[1]
٤. برای بررسی درستی نتایج، بردار شعاعی r را از فرمول (الف) و با استفاده از مقدار بی هنجاری واقعی که در بخش ۳ پیدا کردیم، محاسبه می کنیم.

۷۱. بی هنجاری خروج از مرکزی به صورت سری ای از e و بی هنجاری میانگین

اکنون معادلهٔ کپلر را به شکل متفاوت، که در آن E را به صورت سری ای از خروج از مرکز e و بی هنجاری میانگین M به دست خواهیم آورد، بیان می کنیم. معادلهٔ کپلر را به صورت زیر در دست داریم.

$$\boldsymbol{E = M + e \sin E} \qquad (۷۵)$$

E را کسر کوچکی می گیریم، در این صورت بدیهی است که تقریب نخست E، که با $E_۱$ نشان داده می شود، با چشم پوشی از esinE به دست خواهد آمد؛ به طوری که داریم

$$E_۱ = M$$

مقدار دقیق تر E یعنی تقریب دوم که با $\boldsymbol{E_2}$ نشان داده می شود، به روشنی با نوشتن $E_۱$ (یاM) در طرف راست رابطهٔ (۷۵) به دست خواهد آمد. بدین ترتیب داریم

$$E_۲ = M + e\sin M \qquad (۷٦)$$

به روشی مشابه، اگر تقریب سوم E با $\boldsymbol{E_3}$ نشان داده شود، می توانیم بنویسیم

$$E_۳ = M + e\sin E_۲$$

که با استفاده از رابطهٔ (۷٦) به صورت زیر در می آید

$$E_۳ = M + e\sin[M + e\sin M]$$

[1]- در روشي كه در بخش ۷۷ شرح داده مي شود منحصراً كميت هاي E و r محاسبه مي شوند.

یا

$$E_3 = M + e\sin M \cos[e\sin M] + e\cos M \sin[e\sin M]$$

اما، چون e کوچک است، می توانیم معادلهٔ اخیر را به صورت زیر بنویسیم

$$E_3 = M + e\sin M + e\cos M \times e\sin M \tag{۷۷}$$

که تا جملات با ضریب e^2 صحیح است. رابطهٔ (۷۷) معادل است با

$$E_3 = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M \tag{۷۸}$$

با این روش می توانیم تا آنجا که بخواهیم، پیش برویم. تقریبی باز هم بیشتر رابطهٔ زیر را به دست می دهد

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + \frac{3}{8}e^2 \sin 3M \tag{۷۹}$$

اگر بتوانیم از جمله های شامل e^4 و توان های بالاتر چشم پوشی کنیم، با داشتن e و E، به کمک فرمول (۷۹) می توانیم مقدار M را حساب کنیم.

۷۲. بی هنجاری واقعی به صورت سری ای از e و بی هنجاری خروج از مرکزی

با فرمول زیر شروع می کنیم

$$\tan\frac{v}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \tan\frac{E}{2} \tag{۸۰}$$

زاویهٔ ϕ، بین ۰ و $\pi/2$، به گونهٔ زیر تعریف می کنیم

$$sin\phi = e \tag{۸۱}$$

آن وقت می توانیم رابطهٔ (۸۰) را به صورت زیر بنویسیم

$$\tan\frac{v}{٢} = \frac{١+\tan\frac{\phi}{٢}}{١-\tan\frac{\phi}{٢}}\tan\frac{E}{٢}$$

یا، با قرار دادن $\tan\phi/٢ = x$، داریم

$$\tan\frac{v}{٢} = \frac{١+x}{١-x}\tan\frac{E}{٢} \qquad (٨٢)$$

چون $٢\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ و $٢i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$است، که در آن‌ها I به وسیلهٔ $i^2 = -1$ تعریف مـی شـود، مـی توانیم بنویسیم

$$\tan\frac{v}{٢} = \frac{e^{iv/٢}-e^{-iv/٢}}{i\left(e^{iv/٢}+e^{-iv/٢}\right)} = \frac{e^{iv}-١}{i\left(e^{iv}+١\right)}$$

فرمول مشابهی نیز برای E/٢ وجود دارد. از این رو رابطهٔ (٨٢) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{e^{iv}-١}{e^{iv}+١} = \frac{١+x}{١-x}\times\frac{e^{iE}-١}{e^{iE}+١}$$

که از آن نتیجه می شود

$$e^{iv} = \frac{e^{iE}-x}{١-xe^{iE}}$$

یا

$$e^{iv} = e^{iE}\left(١-xe^{-iE}\right)/\left(١-xe^{iE}\right)$$

با گرفتن لگاریتم از دو طرف، خواهیم داشت

$$iv = iE + \log\left(١-xe^{-iE}\right) - \log\left(١-xe^{iE}\right)$$

چون $x = \tan\phi/٢$ و $\phi = \sin^{-١}(e)$ است از این رو از لحاظ عددی x<١ است، زیرا داریم e<١. با به کار بردن فرمول مربوط به سری لگاریتمی، پس از اندکی ساده کردن، خواهیم داشت

$$v = E + ۲\left(x\sin E + \frac{x^{۲}}{۲}\sin ۲E + \frac{x^{۳}}{۳}\sin ۳E + ... \right) \qquad (۸۳)$$

باید دانست که

$$x \equiv \tan\frac{\phi}{۲} = \frac{\sin^{۲}\frac{\phi}{۲}}{\sin\frac{\phi}{۲}\cos\frac{\phi}{۲}} = \frac{۱-\cos\phi}{e} = \frac{۱-\left(۱-e^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}{e}$$

یا

$$x = \frac{۱}{۲}e + \frac{۱}{۸}e^{۳} + ... \qquad (۸٤)$$

از این رو، سرانجام از روابط (۸۳) و (۸٤) نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم

$$v = E + \left(e + \frac{۱}{٤}e^{۳} \right)\sin E + \frac{۱}{٤}e^{۲}\sin ۲E + \frac{۱}{۱۲}e^{۳}\sin ۳E \qquad (۸۵)$$

که تا توان سوم e صحیح است.

۷۳. تعدیل مرکز

با استفاده از روابط (۷۹) و (۸۵) v را به صورت سری ای از e و M بیان می کنیم. جمله های این سری را تا e^3 ادامه می دهیم. چون در رابطهٔ (۸۵)، E به صورت sin۲E, sinE و sin۳E است، نخست از رابطهٔ (۷۹) مقدار این کمیت‌ها را بر حسب e و M، پیدا می کنیم. پس با استفاده از رابطهٔ (۷۹) داریم

$$\sin E = \sin\left[M + \left(e - \frac{e^{۳}}{۸} \right)\sin M + \frac{۱}{۲}e^{۲}\sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^{۳}\sin ۳M \right] \qquad (۸٦)$$

اما از آنجا که در رابطهٔ (۸۵)، sinE در ضریب e ضرب می شود در رابطهٔ (۸٦) تنها لازم است جمله‌ها را تا $e^{۲}$ نگه داریم، بنابراین داریم

$$\sin E = \sin\left[M + e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M\right]$$

که می تواند به صورت زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}\sin E &= \sin M\left[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M\right] + \cos M \sin\left[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M\right]\\ &= \sin M\left[۱ - \frac{e^۲}{۲}\sin^۲ M\right] + \cos M\left[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M\right]\\ &= \sin M + \frac{۱}{۲}e\sin ۲M + \frac{۱}{۲}e^۲\left(\sin ۲M \cos M - \sin^۳ M\right)\\ &= \left(۱ - \frac{۱}{۸}e^۲\right)\sin M + \frac{۱}{۲}e\sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^۲ \sin ۳M\end{aligned}$$

به همین ترتیب، اگر تنها جمله های لازم را نگه داریم، نتیجه های زیر را به دست می آوریم

$$\begin{aligned}&\sin ۲E = \sin ۲M + e(\sin ۳M - \sin M)\\ &\sin ۳E = \sin ۳M\end{aligned}$$

از این رو، با استفاده از رابطهٔ (۷۹) و عبارت هایی که هم اینک برای sin۲E, sinE و sin۳E پیدا کردیم، فرمول (۸۵) به صورت زیر در می آید

$$v - M = \left(۲e - \frac{۱}{٤}e^۳\right)\sin M + \frac{٥}{٤}e^۲ \sin ۲M + \frac{۱۳}{۱۲}e^۳ \sin ۳M \qquad (۸۷)$$

فرمول اخیر تعدیل مرکز نام دارد و اهمیت آن در این است که بی هنجاری واقعی v را مستقیماً برحسب خروج از مرکز e و بی هنجاری میانگین M بیان می کند. بدین ترتیب وقتی e و M معلوم باشند، v را می توان محاسبه کرد. تعدیل مرکز را در یکی از فصل های بعدی به کار می بریم.

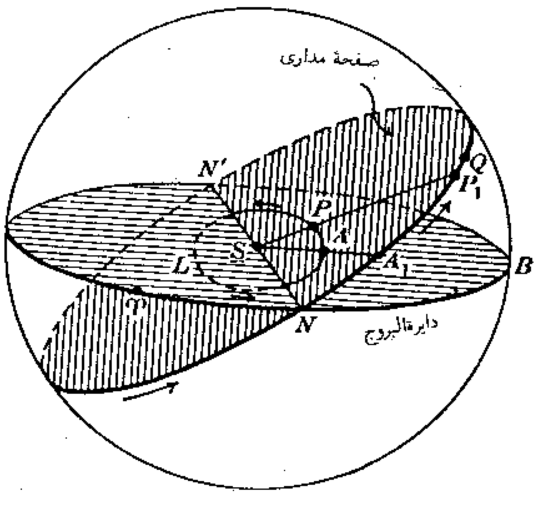
۷٤. مدار در فضا

صفحهٔ دایرهٔ البروج را صفحهٔ بنیادی می گیریم. به طور کلی، صفحهٔ مداری هر سیاره ای، به جز زمین، زاویهٔ ویژه ای با دایرهٔ البروج می سازد. فرض کنید کره ای به مرکز خورشید رسم شده باشد (شکل ٤۹). چون صفحهٔ مداری سیاره (ناحیهٔ هاشور

خورده) از مرکز خورشید عبور می کند، بنابراین کره را در یک دایرهٔ عظیمهٔ NQN' قطع خواهد کرد. این دایرهٔ عظیمهٔ، دایرهٔ البروج را در دو نقطهٔ N و 'N، موسوم به گره، قطع می کنند. در این شکل، بیضی مداری APL که در آن A حضیض است رسم شده است؛ ادامهٔ شعاع SA دایرهٔ عظیمهٔ 'NQN را در A_1 قطع می کند و اگر P مکان سیاره در مدارش در لحظهٔ t باشد، ادامهٔ بردار شعاعی SP این دایرهٔ عظیمه را در P_1 قطع می کند. بدین ترتیب، چون $A\hat{S}P$ بی هنجاری واقعی v است، زاویهٔ A_1SP_1 یا کمان دایرهٔ عظیمه ای A_1P_1 نیز برابر v است. در شکل، v در جهت پیکان بین A_1 و P_1 افزایش می یابد. بنابراین N گرهٔ صعودی و 'N گرهٔ نزولی نامیده می شود.

زاویهٔ P_1NB (که با i نشان داده می شود) زاویهٔ میل صفحهٔ مداری را نسبت به دایرهٔ البروج مشخص می کند و به طور ساده زاویهٔ میل خوانده می شود. کمان NA_1 که از گرهٔ صعودی به طرف A_1 اندازه گیری می شود، شناسهٔ حضیض نام دارد و با ω نشان داده می شود.

فرض کنید γ مکان نقطهٔ اعتدال بهاری باشد. کمان γN طول گرهٔ صعودی است و با θ نشان داده می شود. مجموع کمان های γN و NA_1 را طول حضیض می نامند و با ϖ نشان می دهند.



شکل۴۹

از این رو، داریم

$$\varpi = \theta + \omega \qquad (۸۸)$$

باید توجه داشت که از طول حضیض فقط θ در امتداد دایرهٔ البروج اندازه گرفته می شود.

i,θ، و ϖسه عنصر مدارند. طول گره (θ) نقاط 'N و N روی کرهٔ سماوی، یعنی محل های تلاقی صفحهٔ مداری و دایرهٔ البروج، را تعیین می کند. عنصر L زاویه ای که تحت آن صفحهٔ مدار نسبت به دایرهٔ البروج مایل است را مشخص می کند. طول حضیض (ϖ) جهت حضیض را نسبت به دایرهٔ البروج و نقطهٔ اعتدال بهاری تعیین می کند.

از آن جا که سه عنصر e,a و τ که در بخش ۷۰ بررسی شدند فقط به بیضی مداری مربوط می شوند، می بینیم که برای مشخص کردن کامل یک مدار سیاره ای به شش عنصر نیاز داریم، که عبارت اند از i,θ,τ,e,a، و ϖ.

در شکل ٤۹ مجموع کمان های γN و NP_1 طول واقعی سیاره در مدار نامیده می شود اگر این طول را با L نشان دهیم، خواهیم داشت

$$L = \theta + \omega + v$$

یا با استفاده از رابطهٔ (۸۸) داریم

$$L = \varpi + v \qquad (۸۹)$$

اینک یک بردار شعاعی را که در لحظهٔ τ بر SA منطبق است و در صفحهٔ مدار با سرعت زاویه ای میانگین n حرکت می کند در نظر می گیریم. در لحظهٔ t این بردار شعاعی زاویهٔ $n(t-\tau)$ یعنی بی هنجاری M را پیموده است و فرض خواهیم کرد که در آن هنگام بردار شعاعی، کره را در Q قطع کند. بدین ترتیب کمان A_1Q برابر M است. اگر l مجموع کمان های γN و NQ را نشان دهد، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} l &= \theta + \omega + n(t-\tau) \\ l &= \varpi + n(t-\tau) \end{aligned} \qquad (۹۰)$$

l، طول میانگین سیاره خوانده می شود.

فرمول (۹۰) معمولا به صورت زیر نوشته می شود

$$l = nt + \varepsilon \qquad (۹۱)$$

که در آن ε از رابطهٔ

$$\varepsilon = \varpi - n\tau \qquad (۹۲)$$

به دست می آید. از رابطهٔ (۹۱) دیده می شود که به ازای t=۰ کمیت ε برابر طول میانگین است. این لحظه را «مبدأ» می نامند و بنابراین ε طول میانگین در مبدأ است.

از رابطهٔ (۹۰) داریم

$$M = n(t-\tau) = l - \varpi$$

به طوری که، با استفاده از رابطه (۹۱) خواهیم داشت

$$M = nt + \varepsilon - \varpi$$

از این رو معادلهٔ کپلر می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$E - e\sin E = nt + \varepsilon - \varpi \qquad (۹۳)$$

چون ε طبق رابطهٔ (۹۲) برحسب دو عنصر ϖ و τ تعریف می شود، می توان آن را به جای τ به عنوان یکی از شش عنصر مدار در نظر گرفت.

برای روشن شدن مطلب، در زیر عناصر مدار مریخ برای مبدأ ظهر متوسط گرینویچ، روز صفر ژانویهٔ ۱۹۲۹ داده می شود

$$a = ۱٫۵۲۳۶۹\,AU \qquad \theta = ۴۹^\circ ۰' ۳۶''٫۰$$

$$e = ۰٫۰۹۳۳۴ \qquad i = ۱^\circ ۵۱' ۰''٫۵$$

$$\varepsilon = ۸۴^\circ ۴۲' ۳۳''٫۹ \qquad \varpi = ۳۳۴^\circ ۴۵' ۷''٫۳$$

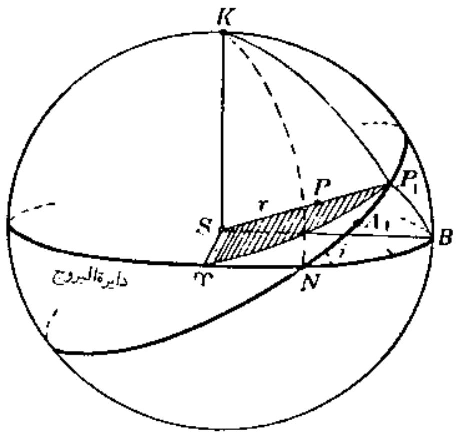
۷۵. مختصات قائم خورشید مرکزی یک سیاره نسبت به دایرهٔ البروج

فرض کنید که در شکل ۵۰، $SB, S\gamma$، و SK محور های قائمی باشند که از خورشید می گذرند و یک دستگاه راستگرد تشکیل می دهند، به طوری که γ نقطهٔ اعتدال بهاری، B نقطه ای روی دایرهٔ البروج به فاصلهٔ ۹۰° از γ و K قطب دایرهٔ البروج باشد. همچنین فرض کنید P مکان سیاره در مدارش در لحظهٔ t باشد به طوری که داشته باشیم $SP = r$. فرض کنید P_1 نقطهٔ برخورد SP با کرهٔ سماوی باشد. مختصات قائم سیارهٔ P نسبت به محور های $SB, S\gamma$، و SK را با (x_1, y_1, z_1) نشان می دهیم. پس داریم

$$\frac{x_1}{r} = \cos PS\gamma = \cos P_1 S\gamma$$

یا، با نوشتن کمان $P_1\gamma$ به جای زاویهٔ $P_1\hat{S}\gamma$ داریم

$$x_1 = r\cos P_1\gamma \qquad (۹٤)$$



شکل ۵۰

همین طور، (۹۵)

$$y_1 = \tau\cos P_1 B$$

$$z_1 = \tau\cos P_1 k \qquad (۹٦)$$

اینک مثلث کروی $P_1\gamma N$ را در نظر می گیریم که در آن $\theta = \gamma N$، $NP_1 = \omega + \upsilon$ و $P_1\hat{N}\gamma = 180^\circ - i$ است. در این صورت با استفاده از فرمول کسینوس، (الف)، داریم

$$\cos P_1\gamma = \cos\theta\cos(\omega+\upsilon) - \sin\theta\sin(\omega+\upsilon)\cos i$$

از این رو

$$x_1 = \tau[\cos\theta(\omega+\upsilon) - \sin\theta(\omega+\upsilon)\cos i] \qquad (۹۷)$$

همین طور، از مثلث P_1NB که در آن $NB = 90^\circ - \theta$ و $P_1\hat{N}B = i$ است، داریم

$$y_1 = t[\sin\theta\cos(\omega+u)\cos i] \qquad (۹۸)$$

در مثلث KP_1N داریم $KN = 90^\circ$ و $K\hat{N}P_1 = 90^\circ - i$؛ از این رو با به کار بردن فرمول (الف) نتیجه می گیریم که

$$z_1 = t\sin(\omega + u)\sin i \tag{۹۹}$$

بدین ترتیب هنگامی که u و r و عناصر θ،i و ω معلوم باشند، می توان از فرمول های (۹۷) (۹۸)، و (۹۹) مختصات خورشید مرکزی (x_1, y_1, z_1) را محاسبه کرد.

در عمل بهتر است زاویه های کمکی B_1, b_1, A, a را که به وسیۀ روابط زیر تعریف می شوند و در آنها θ و I معلوم فرض می شوند، محاسبه کنیم

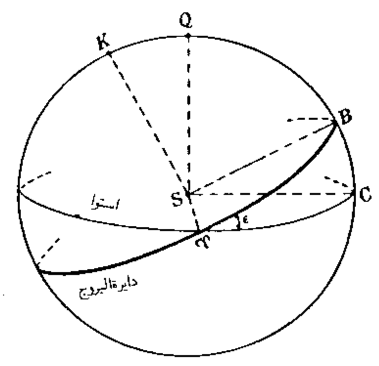
$$\left.\begin{array}{ll} \sin a \sin A = \cos\theta\,, & \sin a \cos A = -\sin\theta \cos i \\ \sin b_1 \sin B_1 = \sin\theta, & \sin b_1 \cos B_1 = \cos\theta \cos\theta i \end{array}\right\} \tag{۱۰۰}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = T\sin a \sin\,(A + \omega + \upsilon) \\ y_1 = T\sin b_1 \sin\,(B_1 + \omega + \upsilon) \\ z_1 = T\sin\,(\omega + \upsilon)\sin i \end{array}\right\} \tag{۱۰۱}$$

۷۶. مختصات استوایی خورشید مرکزی یک سیاره

فرض می کنیم در شکل ۵۱ γCاستوای کرۀ سماوی باشد. دستگاه محور های راستگرد قائم استواری SC,SY، و SQ را، که در آن C نقطه ای روی استوا به فاصلۀ ۹۰° از γ و Q قطب شمال استواست. در نظر می گیریم و فرض می کنیم $(x_1 y_1 z)$ مختصات سیاره نسبت به این محورها باشند. پس داریم $B\hat{\gamma}C = KQ = \varepsilon$، که در آن ε زاویۀ میل دایرۀ البروج است.



شکل۵۱

محورهای SCو SQ را می توان از SB و SK با چرخاندن محورهای اخیر به اندازهٔ ε حول $S\gamma$ به دست آورد. از این رو روابط زیر بین (x_1y_1z) و $(x_1y_1z_1)$ به دست می آیند.

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1\cos\varepsilon - z_1\sin\varepsilon \\ z &= y_1\sin\varepsilon + z_1\cos\varepsilon \end{aligned} \qquad (۱۰۲)$$

با جانشانی مقادیر z_1 و y_1، x_1 از روابط (۹۷)، (۹۸)،(۹۹) در روابط بالا، عبارتهایی را برای x، y، و z بر حسب r و u، عناصر θ، i، و ω و εبه دست می آوریم. زاویه های کمکی c,B,b و C را با روابط زیر تعریف می کنیم

$$\left.\begin{aligned} \sin b\sin B = \sin\theta\cos\varepsilon, \sin b\cos B = \cos\theta\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon \\ \sin c\sin C = \sin\theta\sin\varepsilon, \sin c\cos C = \cos\theta\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (۱۰۳)$$

$$\left\{\begin{aligned} n = r\sin a\sin(A+W+U) \\ Y = R\sin b\sin(B+W+U) \\ z = r\sin c\sin(c+w+u) \end{aligned}\right\} \quad (۱٤۰)$$

مزیت این فرمول‌ها هنگامی آشکار می شود که مختصات قائم چندین مکان سیاره مورد نیاز باشند. زیرا وقتی کمیتهای B, A, و C، sin b, sin a از روابط (۱۰۰) و (۱۰۳) و مقادیر معلوم عناصر θ، iو ω و ε محاسبه شده اند می توانند برای تعیین چندین مقدار $(x_1y_1z_1)$ در رابطهٔ (۱۰٤) به کار روند. فرض بر این است که برای مکان هر سیاره، بردار شعاعی t و بی هنجاری واقعی v با روش هایی که قبلاً توضیح داده شدند، محاسبه شده اند.

روش دیگری برای بدست آوردن مختصات $(x_1y_1z_1)$ در بخش زیر توضیح داده می شود.

۷۷. مختصات استوایی خورشید مرکزی یک سیاره (روش دیگر)

مختصات استوایی خورشید مرکزی را می توان به صورت دیگری که امروز برای کامپیوتر مناسب است نوشت.[۱] نخستین معادلهٔ روابط (۱۰٤) می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$x = r\cos u\left[\sin a\sin(A+w) + r\sin v\left[\sin a\cos(A+W)\right]\right]$$

[۱]. Journal of the Brit.Astron Association. Vol. XXXII,p.۲۳۱. (CEAdams).

یا

$$T = \frac{S}{S-۱} \qquad (۱۱٤)$$

برای یک سیارهٔ داخلی، دروهٔ T^1 از رابطهٔ زیر به دست می آید

$$T^{۱} = \frac{S^{۱}}{۱+S^{۱}}$$

که در آن $S^{۱}$ دروهٔ هلالی مربوط است.

روشن است که برای سیاره های بیرونی دورهٔ هلالی بیش از یک سال است. دوره های هلالی برای عطـارد و زحـل بـا ایـن روش ۱۱٦ و ٥۸٤ روز به دست آمده اند.

به سبب فرض های که در این بخش در مورد مدارهای زمین و سیارهٔ مورد نظر وضع شده است دوره های مداری به دسـت آمده از این روش، تقریبی اند؛ مقادیر دقیق از مطالعهٔ کامل تر مدار های سیاره ای به دست می آیند.

۸۱. مدار زمین

خروج از مرکز زمین ۰۱٦۷۳۹ ر ۰ و طول حضیض آن ۱ر $۱۰۱^\circ ٤٥' ۸''$ است؛ این کمیت‌ها به آغاز سال ۱۹۳۱ باز می گردند.

سال نجومی را فاصلهٔ زمانی بین دو بازگشت پیاپی زمین به یک نقطه بین ستاره ها، از دید خورشید، تعریف می کنند و برابر ۲٥٦٤ ر ۳٦٥ روز متوسط خورشیدی است.

۸۲. مدار ظاهری خورشید

برای بسیاری از هدف های ما بهتر است مدار ظاهری خورشید، یعنی مداری که خورشید به ظاهر نسبت به زمین طی می کند را در نظر بگیریم. البته، خروج از مرکز همان است که در بخش قبل داده شد.

نقطه ای از مدار که در آن خورشید در نزدیکترین فاصله از زمین قرار دارد حضیض (زمین) و دورترین نقطهٔ آن اوج (زمـین) است. چون جهت حضیض (از دید خورشید) دقیقاً مخالف حضیض از دید زمین است، نتیجه می گیریم که

$$\varpi = \varpi_1 + 180^\circ \qquad (۱۱٥)$$

که در آن ϖ طول حضیض (زمین) و ϖ_1 طول حضیض را نشان می دهند.

روشن است که سال نجومی از دید زمین بازهٔ زمانی بین دو بازگشت خورشید است (در مدار ظاهریش) بـه یـک نقطـه بـین ستاره ها.

سال اعتدالی را بازهٔ بین دو عبور پیاپی خورشید از نقطهٔ اعتدال بهاری تعریف می کنند. در یکی از فصل های بعدی خـواهیم دید که اعتدال بهاری، آن طوری که تاکنون فرض کرده ایم، نقطهٔ ثابتی روی دایرهٔ البروج نیست و در نتیجه طول سال اعتدالی با طول سال نجومی اندکی تفاوت داد. سال اعتدال ۲٤۲۲ ر ۳٦٥ روز متوسط خورشیدی است. وقتی کلمهٔ «سال» بدون هـیچ گونه صفت توصسفی به کار برده شود منظور همان سال اعتدالی است.

به سبب تأثیر جاذبهٔ گرانشی سیارات بر زمین، عناصر مدار زمین کاملاً ثابت نیستند. بویژه طـول حضـیض، [یـا بنابـه رابطـهٔ (۱۱٥) طول حضیض (زمین)]، تغییرات کوچکی می کند. بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی زمین از حضیض در مدارش- یا بازه زمانی بین دو عبور پیاپی خورشید از حضیض (زمین) در مدار ظاهریش سال بی هنجار نامیده می شود که ۲٥۹٦ ر ۳٦٥ روز متوسط خورشیدی است.

۸۳. مدار ماه

فرمول هایی را که برای حرکت یک سیاره به دور خورشید به دست آوردیم می توان برای حرکت ماه به دور زمین نیز به کار برد. مدار ماه در فضا همانند مدار یک سیاره نسبت به دایرهٔ البروج مشخص می شود و شکل مناسب آن نیز (نظیر شکل ٤۹) مشابه مدار مشخصهٔ سیاره است با این تفاوت که مرکز کرهٔ سماوی در این جا به عوض S (خورشید)، E (زمین) است. طول سماوی گره ماه، طول حضیض (یعنی نزدیکترین نقطهٔ مدار ماه به زمین- دورترین نقطـهٔ اوج اسـت)، و زاویـهٔ میـل صـفحهٔ مداری به همان روش بخش ۷٤ تعریف می شوند.

تا وقتی که فقط جاذبهٔ گرانشی زمین در نظر گرفته می شود، مدار ماه بیضی خواهد بود؛ اما به سبب اثر گرانشی خورشید و تا حدی سیارات، عناصر مداری، تغییرات (اختلال های) قابل ملاحضه ای می کنند که باید در اغلب مسائل متأثر از ماه و بویژه در نظریهٔ حرکت تقدیمی و ناوش (رقص محوری)، که در فصل ۱۰ مورد بحث قرار می گیرند، در نظر گرفته شوند.

ماه هلالی عبارت است از بازهٔ زمانی بین دو «ماه نو» پیاپی. ماه نو زمانی پدیدار می شودکه طول های سماوی زمـین مرکـزی خورشید و ماه یکی باشند. مقدار متوسط ماه هلالی ٥۳۰٦ ر ۲۹ روز متوسط خورشیدی است.

ماه نجومی بازهٔ زمانیی است که ماه در آن، از دید زمین، دور کاملی را نسبت به ستاره‌ها می پیماید. مقدار میانگین آن ۳۲۱۷ ر ۲۷ روز متوسط خورشیدی است.

به سبب اختلال‌ها جهت حضیض ماه (نسبت به زمین) تغییر می کند و مدتی که لازم است تا ماه روی مسیرش به دور زمین از حضیض تا حضیض بعدی را بپیماید ماه بی هنجار نامیده می شود؛ مقدار آن ۵۵٤٦ ر ۲۷ روز متوسط خورشیدی است.

همچنین به سبب اختلال ها، گره صعودی ماه در امتداد دایره البروج حرکت قهقرایی دارد، به طوری که طول کره با آهنگ تقریباً °۲۰ در سال کاهش می یابد (مدتی که لازم است تا گرهٔ ماه یک دور کامل دایرهٔالبروج را طی کند ٦ر۱۸ سال است.) ماه گرهی را بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی ماه از گرهٔ صعودی تعریف می کنند؛ مقدار آن ۲۱۲۲ر۲۷ روز متوسط خورشیدی است.

تمرین‌ها

نمادهای به کار رفته عبارت اند از:

a= نیم محور بزرگ مدار، E= بی هنجاری خروج از مرکزی

E=خروج از مرکز، M= بی هنجاری میانگین

u= بی هنجاری واقعی

۱ـ اگر نیم محور مدار عطارد و مشتری به ترتیب ۳۸۷ر۰ و ۲۰۳ر۵ واحد نجومی و دورهٔ مداری مشتری ۸٦۲ر۱۱ سال باشد، نشان دهید که دورهٔ مداری عطارد ۲٤۰٦ر۰ سال است.

۲ـ با چشمپوشی از جرم نخستین قمر مشتری، جرم این سیاره را بر حسب جرم زمین از داده های زیر حساب کنید.

دورهٔ گردش نخستین قمر: $۱^{d}۱۸^{h}۲٤^{m}$

فاصلهٔ میانگین نخستین قمر از مرکز مشتری: ٤٤٥۰ کیلومتر

شعاع زمین: ٦٦۰۰ کیلومتر

شتاب گرانی در سطح زمین: ۹۱ر۹ متر بر مجذور ثانیه

[لندن ۱۹۳۰]

۳ـ دورهٔ مداری مشتری ٤۳۳۳ روز متوسط خورشیدی و جرم آن ۱/۱۰٤۸ برابر جرم خورشید است. یک جسم کوچک با جرم ناچیز در یک مدار بیضیوار که محور بزرگش برابر محور بزرگ مشتری است، به دو خورشید حرکت می کند؛ نشان دهید که دورهٔ گردش این جسم $\frac{۱}{۱٦}$ ٤۳۳٥ روز است.

[لندن ۱۹۳۰]

٤ـ اگر T دروهٔ مداری یک سیاره باشد، نشان دهید که یک افزایش کوچک Δa در نیم محور بزرگ a، افزایشی برابر $۳T\Delta a/۲a$ در دورهٔ مداری ایجاد می کند.

٥ـ اگر V_1 و V_2 سرعت های خطی یک سیاره به ترتیب در حضیض و اوج باشند، ثابت کنید که داریم

$$(۱-e)V_۱=(۱+e)V_۲$$

٦ـ اگر $e=\sin\phi$ باشد، ثابت کنید که داریم

$$\tan\frac{\upsilon}{۲}=\tan(٤٥^\circ+\frac{\upsilon}{۲}\phi)\tan\frac{۱}{۲}E$$

۷ـ اگر $e=\sin\phi$ باشد نشان دهید، اگر توان های بالاتر از توان دوم e قابل چشم پوشی باشند، مقدار E که در معادلهٔ کپلر صدق می کند از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$\tan E=\sec\phi\tan ۲\chi$$

که در آن

$$\tan\chi=\tan(٤٥^\circ+\frac{۱}{۲}\phi)\tan\frac{۱}{۲}M$$

و

$$\tan E=\sin MI(\cos M-e)$$

۸ـ رابطه های زیر را ثابت کنید.

$$\cos\upsilon = \frac{\cos E - e}{۱ - e\cos E}$$

$$\sin\upsilon = \frac{(۱-e^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\sin E}{۱ - e\cos E}$$

۹ـ ثابت کنید که اگر توان های چهارم و بالاتر e قابل چشم پوشی باشند.

$$E = M + \frac{e\sin M}{۱ - e\cos M} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{e\sin M}{۱ - e\cos M}\right)^{۳}$$

یک جواب معادلهٔ کپلر است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۱۰ـ عناصر مربوط یک مدار عبارت انداز: e=۰٫۹٦۱۷۳۳ (خروج از مرکز)، T=۷٦٫۰۸۵ (دورهٔ گردش به سال)؛ زمان عبور از حضیض، ۲٤ مه ۱۹۱۰. اگر وقتی M=٤۷°٫۳ و e=۰٫۹٦ است. E=۱۰۱°٫۳ یک جواب تقریبی معادلهٔ کپلر باشد، نشان دهید که مقدار E برای ۲٤ مه ۱۹۰۰ برابر $101^\circ 20' 33''$ است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۱۱ـ ستارهٔ دنباله داری یک مدار هذلولی به دور خورشید طی می کند؛ ثابت کنید که سرعت V از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$V^{۲} = \mu\left(\frac{۲}{t} + \frac{۱}{a}\right)$$

اگر کمینهٔ فاصلهٔ خورشید مرکزی آن k واحد نجومی و بیشینه سرعت خطی آن l برابر سرعت زمین باشد، نشان دهید که زاویهٔ بین مجانبهای هذلولی برابر است با

$$۲\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{l^{۲}k - ۱}\right)$$

[ادینبورو، ۱۹۲۱]

۱۲ـ اگر φ زاویهٔ بین جهت حرکت یک سیاره و جهت عمود بر بردار شعاعی باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tan\psi = \frac{e\sin E}{(1-e^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

۱۳ـ یک سیاره در مداری با زاویهٔ میل کوچک i ، نسبت به دایرهٔ البروج، حرکت می کند. نشان دهید، اگر میل آن بیشینه باشد، یا حرکت عرضی آن صفر و یا طول سماوی آن تقریباً برابر $90^{\circ} + i\cot\varepsilon\sin\theta$ می شود، که در آن θ طول گرهٔ صعودی و ε میل دایرهٔ البروج است.

۱٤ـ فاصلهٔ میانگین زهره از خورشید ۷۲ر۰ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. اگر فرض شود که مدار زهره دایره ای است که در صفحهٔ دایرهٔ البروج، بزرگترین ارتفاعی که ناهید در آن می تواند پس از غروب خورشید در یک عرض جغرافیایی معلوم قابل رؤیت باشد، و زمانی از سال که انی حالت رخ می دهد را معین کنید.

[آزمون دانشجویان ممتازی ریاضی در کمبریج]

۱۵ـ اگر (λ_1,β_1)، (λ_2,β_2) ، و (λ_3,β_3) طول و عرض سماوی خورشید مرکزی سیاره ای در سه نقطهٔ متفاوت از مدارش باشند، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\tan\beta_1\sin(\lambda_2-\lambda_3)+\tan\beta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)+\tan\beta_3\sin(\lambda_1-\lambda_2)=0$$

۱٦ـ ثابت کنید تعدیل مرکز بر حسب بی هنجاری واقعی u از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1^{p-1}\frac{2\lambda^{p}\{(p+1)-(p1)\lambda^{2}\}}{p(1+\lambda^{2})}\sin pu$$

که در آن $\lambda = e/(1+\sqrt{1-e^{2}})$ و e خروج از مرکز مدار است.

نشان دهید اگر e کوچک باشد، مقدار پیشینهٔ تعدیل مرکز هنگامی اتفاق می افتد که $V=(1/2)\pi+\sin^{1}(3e/4)$ باشد.

[لندن، ۱۹۳۰]

۱۷ـ فاصلهٔ حضیض مدار سهموی یک ستارهٔ دنباله دار a واحد نجومی است (a<1). به فرض این که مدار زمین دایره ای باشد و ستارهٔ دنباله دار در صفحهٔ دایرهٔ البروج حرکت کند نشان دهید، اگر t (به سال) فاصلهٔ زمانیی باشد که در آن ستارهٔ دنباله دار درون مدار زمین است، داریم.

$$t = \frac{۱}{۳\pi}(۱+۲a)(۲-۲a)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۸ـ (قضیهٔ اویلر) اگر t و t_1 بردار های شعاعی دو نقطهٔ C و C_1 روی یک مدار سهموی باشند و K فاصلهٔ C_1 C باشد، نشان دهید زمان بین C_1و C در مدار برابر است با

$$\frac{T_۰}{۱۲\pi}\left\{\left(\frac{T+T_۱+K}{a}\right)^{\frac{۳}{۲}} - \left(\frac{T+T_۱+K}{a}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right\}$$

که در آن T_0 طول سال نجومی و a نیم محور بزرگ مدار زمین است.

۱۹ـ (قضیهٔ لامبرت) اگر t و T_0 بردار های شعاعی دو نقطهٔ C_1و C روی یک مدار بیضوی، k فاصله C_1 C، t زمان لازم برای رفت سیاره از C به C_1، و T دورهٔ مداری باشد، ثابت کنید که داریم

$$\frac{۲\pi t}{T} = \eta - \sin\eta(\eta_۱ - \sin\eta_۱)$$

که در آن

$$\sin\frac{۱}{۲}\eta = \frac{۱}{۲}\left(\frac{t+t_۱+k}{a}\right)^{\frac{۱}{۲}}, \sin\frac{۱}{۲}\eta_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{t+t_۱-k}{a}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

فصل ۶

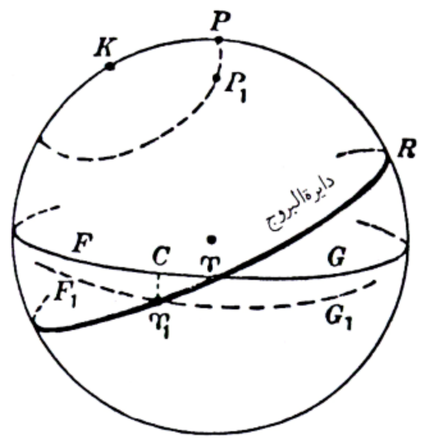
زمان

۸٤. زمان نجومی

در فصل ۲ زمان را به اختصار مطرح کردیم و اکنون آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم. زمان نجومی در هر لحظه در یک محل معین، زاویه‌ی ساعتی نقطه‌ی اعتدال بهاری است. در فصل ۲، دایرهٔ البروج و استوای سماوی را دایره‌های عظیمه‌ی ساکنی روی کره‌ی سماوی در نظر گرفتیم، به طوری که نقطه‌ی اعتدال بهاری نیز، که ممکن است جهت آن برای سهولت مانند جهت ستاره‌ای ویژه تصور شود، به عنوان نقطه‌ای ساکن تلقی شد. اما به سبب پدیده‌های حرکت تقدیمی و ناوش (رقص

محوری)، دیگر نمی‌توان استوای سماوی را دایره‌ی عظیمه‌ای ساکن در نظر گرفت. در نتیجه، نقطه‌ی اعتدال بهاری باید نقطه‌ای روی کره‌ی سماوی تلقی شود که به طور آهسته، طبق قوانین تحقیق شده، نسبت به زمینه‌ی ستاره‌ها حرکت می‌کند.

حرکت تقدیمی و ناوش را در فصل ۱۰ به طور کامل بررسی خواهیم کرد اما در این جا برخی نتایج آن را می‌پذیریم. در بحث زمان نجومی کافی است دایرهٔ البروج را یک دایره‌ی عظیمه‌ی ثابت بگیریم. قطب شمال سماوی P (که با جهت محور زمین معین می‌شود) به سبب حرکت تقدیمی، دایره‌ی صغیره‌ای به دور قطب K دایرهٔ البروج در یک دوره‌ی تقریبی ۲۶۰۰۰ سال طی می‌کند (شکل ۵۵). در حال حاضر قطب شمال سماوی P اندکی کمتر از 1° از ستاره‌ی قدر دوم α خرس کوچک (جُدی یا ستاره‌ی قطبی) فاصله دارد. اما مکان‌های نسبی آن‌ها روز به روز و سال به سال در حال تغییر است. دو هزار سال پیش قطب P، 12° از جُدی فاصله داشت و ۱۲۰۰۰ سال بعد



شکل ۵۵

در فاصله‌ی چند درجه‌ای ستاره‌ی قدر اول نسر واقع قرار خواهد گرفت. جهت محور زمین است که همواره نسبت به زمینه‌ی ستاره‌ها در حال تغییر است.

اکنون شکل ۵۵ را که در آن P قطب شمال سماوی، مثلاً، در آغاز ۱۹۰۰ (به صورت ۱۹۰۰ر۰ نشان داده می‌شود) و P_1 مکان آن در سال بعد است، در نظر می‌گیریم. PP_1 کمانی است از دایره‌ی صغیره‌ای که قطب آن K است. FYG استوای سماوی مربوط به قطب P و $F_1Y_1G_1$ استوای مربوط به قطب P_1 در سال بعد است. Y نقطه‌ی اعتدال بهاری برای ۱۹۰۰ر۰ و Y_1 نقطه‌ی اعتدال بهاری برای ۱۹۰۱ر۰ است. Y و Y_1 را نقاط اعتدال بهاری میانگین در تاریخ‌های مورد نظر و استواهای سماوی مربوط را استواهای میانگین می‌نامند. فرض می‌کنیم قطب شمال سماوی به سبب حرکت تقدیمی به طور یکنواخت در امتداد کمان دایره‌ی صغیره‌ای PP_1 حرکت کند و نقطه‌ی اعتدال بهاری میانگین نیز به طور یکنواخت در امتداد دایرهٔ البروج از Y به Y_1 حرکت قهقرایی انجام دهد. آهنگ حرکت Y در امتداد دایرهٔ البروج ۳ر"۵۰ در سال به دست آمده است.

اکنون به تعریف زمان نجومی بر می‌گردیم. برای سهولت فرض می‌کنیم ستاره‌ای در جهت Y، که فعلاً آن را ثابت می‌گیریم وجود داشته باشد. در این صورت بنا به تعریف، زمان نجومی زاویه‌ی ساعتی Y یا زاویه‌ی ساعتی این ستاره است و دوره‌ی چرخش زمین صرفاً بازه‌ی زمانی بین دو عبور پیاپی این ستاره (یا Y) از دایره‌ی نصف النهار هر رصدخانه‌ی ویژه است. اما هنگامی که زمان نجومی را نسبت به اعتدال بهاری متحرک تعریف می‌کنیم، دیگر نمی‌توانیم دوره‌ی چرخش زمین را بازه‌ی زمانی بین دو عبور پیاپی نقطه‌ی اعتدال بهاری در نظر بگیریم. فرض کنید CY_1 در شکل ۵۵ کمانی از یک دایره‌ی عظیمه باشد که از Y_1 عمود بر استوای FYG رسم شده است. بنابراین جابه جایی نقطه‌ی اعتدال هر تاریخ در بُعد، از نقطه‌ی اعتدال سال ۱۹۰۰ر۰ یعنی Y، با آهنگ سالیانه‌ای که با کمان YC سنجیده می‌شود انجام می‌شود. اما از مثلث کوچک YCY_1 داریم:

$$YC = YY_1 \cos\varepsilon$$

که در آن ε زاویه‌ی میل دایرهٔ البروج است. از این رو:

$$YC = 50''\text{ر}3 \cos\varepsilon$$

و با جانشانی مقدار ε $(23^\circ\ 27')$ به راحتی در می‌یابیم که، در مقیاس زمان، نقطه‌ی اعتدال میانگین، با آهنگ ۰۰۸ر۰ ثانیه در روز نجومی در بُعد از Y فاصله می‌گیرد. در این صورت جهت حرکت نقطه‌ی اعتدال در آسمان به طرف غرب، یعنی مخالف جهت افزایش بُعد است و در نتیجه بازه‌ی زمانی بین دو عبور پیاپی نقطه‌ی اعتدال متحرک از هر دایره‌ی نصف النهار، به

اندازه‌ی ۰٫۰۰۸ ثانیه کمتر از بازه‌ی زمانی حاصل از نقطه‌ی اعتدال یا ستاره‌ی ثابت است. بازه‌ی زمانی اول روز نجومی است (که نسبت به نقطه‌ی اعتدال متحرک تعریف می‌شود) و بازه‌ی زمانی دوم دوره‌ی چرخش زمین است.

استوای واقعی در هر لحظه، به سبب ناوش، با استوای میانگین در آن لحظه اندکی تفاوت دارد. در نتیجه نقطه‌ی اعتدال واقعی در امتداد دایرهٔ البروج، نسبت به نقطه‌ی اعتدال میانگین کمی تغییر مکان می‌دهد؛ این تغییر مکان‌های کوچک مشخصه‌ای دوره‌ای با یک دوره‌ی تقریبی ۱۸ سال دارند. روشن است که تفاوت بُعدی نقطه‌ی اعتدال واقعی در هر لحظه و نقطه‌ی اعتدال میانگین در همان لحظه نیز دوره‌ای است و مقدار عددی آن ممکن است به ۱٫۲ ثانیه برسد.

زمان نجومی میانگین را در ارتباط با نقطه‌ی اعتدال میانگین (فقط حرکت تقدیمی) تعریف می‌کنیم و زمان نجومی ظاهری را وابسته به نقطه‌ی اعتدال واقعی می‌دانیم. از آن جا که حرکت نقطه‌ی اعتدال واقعی در امتداد دایرهٔ البروج می‌تواند ترکیبی از (الف) حرکت یکنواخت ناشی از حرکت تقدیمی (۵۰"٫۳ در سال) و (ب) حرکت نوسانی کم دامنه نسبت به نقطه‌ی اعتدال میانگین، ناشی از ناوش، در نظر گرفته شود، پس روشن است که بازه‌ی زمانی میان دو عبور پیاپی نقطه‌ی اعتدال واقعی از یک دایره‌ی نصف النهار با بازه‌ی زمانی میان دو عبور پیاپی نقطه‌ی اعتدال میانگین اختلاف اندکی خواهد داشت که مشخصه‌ی دوره‌ای دارد. اما این اختلاف از روزی به روز دیگر به قدری کوچک است که روز نجومی را معمولاً برابر میانگین بازه‌ی زمانی میان دو عبور پیاپی نقطه‌ی اعتدال میانگین می‌گیرند. چنان که دیدیم، روز نجومی پذیرفته شده ۰٫۰۰۸ ثانیه کوتاهتر از دوره‌ی چرخش زمین است. ساعت‌های نجومی بر طبق زمان نجومی میانگین تنظیم می‌شوند.

هنگامی که مکان ستاره‌ای در هر لحظه رصد می‌شود، آن مکان نسبت به استوا و نقطه‌ی اعتدال واقعی در آن لحظه سنجیده می‌شود. مثلاً وقتی عبور ستاره‌ای رصد می‌شود. بُعد آن زمان نجومی ظاهری عبور را نشان می‌دهد؛ یا به فرض این که بُعد ستاره (نسبت به استوای واقعی) معلوم باشد، زمان نجومی ظاهری عبور آن به دست می‌آید. با این حال این زمان، زمانی نیست که ساعت نجومی نشان می‌دهد زیرا چنان که گفته شد این ساعت (که آن را صحیح فرض می‌کنیم) برای نگهداری زمان نجومی میانگین تنظیم می‌شود؛ اختلاف آن دو در اثر کوچکی است که به ناوش مربوط می‌شود. بزرگی این کمیت، که یک دوره‌ی اصلی ۱۸ ساله دارد، می‌تواند از ملاحظات دیگری به دست آید. این کمیت در تقویم‌های نجومی تحت عنوان «تعدیل اعتدال‌ها» به مفهوم:

تعدیل اعتدال‌ها + زمان نجومی میانگین= زمان نجومی ظاهری (۱)

برای هر روز جدول بندی شده است.

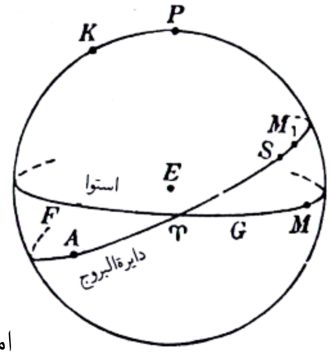
۸۵. زمان زیجی و جهانی

زمان نجومی، بنا به تعریفی که ارائه شد، زاویه‌ی ساعتی اعتدال بهاری یعنی زاویه‌ی ساعتی جهتی معین در فضاست. بنابراین، گذشت زمان نجومی کلاً توسط چرخش زمین تعیین می‌شود و از آن جا که چرخش زمین دستخوش تغییرات نامنظم و غیر قابل پیش بینی است، گذشت زمان نجومی نیز یکنواخت نخواهد بود. این موضوع، در مورد زمان جهانی (UT) نیز صادق است؛ زمان جهانی در بخش ۲۸ برحسب زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین (HAMS)، جسمی پنداری که با آهنگی ثابت بر پیرامون استوای سماوی حرکت می‌کند، تعریف شد. لیکن، توجه داشته باشید که اگر زمان جهانی دقیقاً به زمان نجومی ارتباط داشته باشد آن وقت این آهنگ باید نسبت به چرخش زمین ثابت باشد. پس آهنگی دقیقاً یکنواخت نیست. هنگامی که نخستین بار خورشید میانگین معرفی شد این نکته که چرخش زمین متغیر است ناشناخته بود. بنابراین بین زمان جهانی که با چرخش زمین تعریف می‌شود و زمان زیجی (پیوست ۷ را ببینید) که یکنواخت است و بر پایه‌ی دینامیک گرانشی سیستم خورشیدی، مستقل از چرخش زمین، تعریف می‌شود، هیچ فرقی گذاشته نشد. پس، اگر بخواهیم مفهوم خورشید میانگین را نگه داریم باید آن را برای زمان زیجی و زمان جهانی به دو روش جداگانه تعریف کنیم.

در آغاز از حرکت تقدیمی و ناوش چشم پوشی می‌کنیم، بدین ترتیب که فعلاً نقطه‌ی اعتدال بهاری Y و استوای FYG را ثابت فرض می‌کنیم (شکل ٥٦). فرض کنید جهت خورشید از دیدگاه زمین را در نزدیکترین فاصله از زمین A بنامیم. چون خورشید در مدت یک سال به ظاهر محیط یک بیضی را نسبت به زمین طی می‌کند، A جهت حضیض (زمین) است. سرعت زاویه‌ای میانگین خورشید را در مدار ظاهری آن به دور زمین با n نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم، وقتی مکان خورشید روی کره‌ی سماوی A است، جسمی پنداری از A با سرعت زاویه‌ای میانگین n در امتداد دایرهٔ البروج شروع به حرکت کند. فرض می‌کنیم وقتی خورشید به نقطه‌ی S روی دایرهٔ البروج می‌رسد، جسم پنداری در نقطه‌ی M_1 باشد. اگر t و τ به ترتیب زمان‌های مربوط به مکان خورشید در S و A باشند، کمان AM_1 بی‌هنجاری میانگین M است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$M = n(t-\tau) \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم هنگامی که جسم پنداری در Y است (در زمان τ_1)، جسم دومی که آن را خورشید میانگین پنداری (FMS) خواهیم نامید از نقطه‌ی Y با سرعت زاویه‌ای میانگین n و در



شکل ٥٦

امتداد استوا شروع به حرکت کند. هنگامی که جسم پنداری نخست در M_1 است، دومی در M خواهد بود به طوری که داریم $YM_1 = YM$. اما YM_1 طول سماوی میانگین خورشید، l، و YM بُعد خورشید میانگین پنداری است (RAFMS)؛ از این رو داریم:

$$RAFMS = l = n(t - \tau_1) \qquad (٣)$$

روشن است که طبق این معادله RAFMS با آهنگی یکنواخت افزایش می‌یابد.

هنگامی که حرکت‌های تقدیمی استوا و نقطه‌ی اعتدال بهاری به حساب آورده می‌شوند خورشید میانگین پنداری طبق تعریف، در امتداد استوای میانگین طوری حرکت می‌کند که بُعد میانگین آن همواره برابر طول سماوی میانگین خورشید باشد. در نتیجه این بُعد، از چرخش زمین مستقل است و خورشید میانگین پنداری برای تعریف زمان زیجی، نقطه‌ی مرجع مناسبی است. با وجود این، زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین پنداری تحت تأثیر بی‌نظمی‌های چرخش زمین قرار خواهد گرفت، زیرا این زاویه به جهت نجومی لحظه‌ای دایره‌ی نصف النهار راصد بستگی دارد. بنابراین یک دایره‌ی نصف النهار دیگر، موسوم به دایره‌ی نصف النهار زیجی، که در صورت یکنواخت بودن چرخش زمین با جهت نجومی دایره‌ی نصف النهار گرینویچ مطابقت می‌کند، تعریف می‌شود. زاویه‌ی ساعتی که، به جای دایره‌ی نصف النهار راصد، نسبت به دایره‌ی نصف النهار زیجی اندازه گرفته می‌شود به زاویه‌ی ساعتی زیجی (HA) موسوم است. زمان زیجی برحسب زاویه‌ی ساعتی زیجی خورشید میانگین پنداری تعریف می‌شود.

$$ET = 12^h + EHAFMS \qquad (٤)$$

برای تعریف زمان جهانی به نقطه‌ی مرجعی که اندکی متفاوت است و به سادگی خورشید میانگین خوانده می‌شود، نیاز است. خورشید میانگین نیز پیرامون استوای میانگین ولی با سرعتی که در هر لحظه مستقیماً با سرعت زاویه‌ای زمین متناسب است، حرکت می‌کند. بنا به تعریف، در عصر معینی خورشید میانگین بر خورشید میانگین پنداری و دایره‌ی نصف النهار زیجی بر دایره‌ی نصف النهار گرینویچ منطبق می‌شود. اگر سرعت زاویه‌ای زمین در حال کاهش باشد، بعد از مدتی، دایره‌ی نصف النهار زیجی کمی به طرف شرق دایره‌ی نصف النهار گرینویچ جا به جا می‌شود و بُعد خورشید میانگین از بُعد

خورشید میانگین پنداری، به اندازه‌ای متناسب با آن ولی خیلی کوچکتر از جابه جایی، جهانی، همچون بخش ۲۸، برحسب HAMS در گرینویچ چنین تعریف می‌شود:

$$UT = 12^h + GHAMS \tag{۵}$$

اختلاف بین زمان زیجی و جهانی که در سال ۱۹۷۵ تقریباً برابر ٤٥ ثانیه بود با ΔT نشان داده می‌شود، یعنی:

$$\Delta T = ET - UT \tag{٦}$$

با این حال، چون آهنگ چرخش زمین کاملاً قابل پیشگویی نیست، مقدار ΔT را نمی‌توان از پیش محاسبه کرد.

۸٦. سال نجومی و سال اعتدالی

زمانی که لازم است تا خورشید دایرهٔ البروج را به طور کامل دور بزند سال نجومی خوانده می‌شود. بدین ترتیب، سال نجومی بازه‌ی زمانی میان عبور خورشید از هر نقطه‌ی ثابت روی دایرهٔ البروج و عبور بعدی آن از همان نقطه است.

سال اعتدالی بازه‌ی زمانی میانگین میان دو عبور پیاپی خورشید از اعتدال بهاری است (که اکنون به خاطر حرکت تقدیمی باید آن را در حرکت دانست). اکنون، در شکل ٥٥، فرض می‌کنیم Y اعتدال بهاری میانگین باشد هنگامی که بُعد و میل خورشید هر دو صفرند- بنابراین خورشید در جهت Y است. با حرکت خورشید در امتداد دایرهٔ البروج در جهت YR، اعتدال بهاری میانگین به طور آهسته در جهت مخالف حرکت می‌کند. فرض کنید هنگامی که اعتدال بهاری میانگین و خورشید دوباره بر هم منطبق می‌شوند Y_1 مکان اعتدال بهاری میانگین را نشان دهد. پس سال اعتدالی مدت زمانی است که خورشید برای طی °۳٦۰ منهای Y_1Y لازم دارد. از رصدها معلوم می‌شود:

روز زیجی ۲٤۲۲ر۳٦٥= سال اعتدالی

رابطه‌ی میان سال اعتدالی و سال نجومی به روشنی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$-=\frac{360^\circ}{360^\circ - 50''\text{ر}3} \tag{۷}$$

(حرکت تقدیمی اعتدال بهاری، یعنی YY_1، ۳ر"٥۰ در سال اعتدالی است). بنابراین داریم:

روز زیجی ۲٥٦٤ر۳٦٥= سال نجومی

برای دقت کامل از روز زیجی استفاده می‌کنیم، اما، با دقتی که دو نوع سال در بالا داده شده‌اند، می‌توانیم آن‌ها را برحسب روزهای متوسط خورشیدی زمان جهانی نیز در نظر بگیریم.

۸۷. رابطه‌ی بین زمان جهانی و زمان نجومی میانگین

ما سال اعتدالی را به صورت بازه‌ی زمانی میانگین دو عبور پیاپی خورشید از اعتدال بهاری میانگین متحرک تعریف کرده ایم. با چشم پوشی از اختلاف میان UT و ET، این بازه‌ی زمانی برابر بازه‌ی زمانی میان دو عبور پیاپی خورشید میانگین از اعتدال بهاری میانگین است. بنابراین در خلال یک سال اعتدالی، RAMS از °۰ به °۳٦۰ افزایش می‌یابد، یعنی افزایش در RAMS با آهنگ ۳٦۵٫۲٤۲۲: °۳٦۰ یا ۵۹٬۸″٫۳۳ در یک روز متوسط خورشیدی صورت می‌گیرد. فرض کنید، هنگامی که زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین در مکان معینی برابر H_1 است، t_1 زمان نجومی میانگین باشد و R_1 مقدار RAMS را نشان دهد. بنابراین:

$$t_1 = H_1 + R_1 \qquad (۸)$$

فرض کنید t_2 زمان نجومی میانگین پس از یک روز متوسط خورشیدی باشد. زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین و RAMS به ترتیب به اندازه‌ی °۳٦۰ و ۵۹٬۸″٫۳۳ یا با مقیاس زمانی به ترتیب به اندازه‌ی 24^h و $3^m 56^s$٫۵۵٦ افزایش یافته‌اند. از این رو:

$$t_2 = \left(H_1 + 24^h\right) + \left(R_1 + 3^m\, 56^s\text{ر}\, 556\right) \qquad (۹)$$

به طوری که، با استفاده از رابطه‌ی (۸)

$$t_2 - t_1 = 24^h\, 3^m\, 56^s\text{ر}\, 556$$

اما $t_2 - t_1$ بازه‌ی زمانی نجومی متناظر با 24^h زمان جهانی است. از این رو:

$$24^h\, UT = 24^h\, 3^m\, 56^s\text{ر}556 \text{ زمان نجومی میانگین} \qquad (۱۰)$$

به سهولت از رابطه‌ی (۱۰) می‌توان محاسبه کرد که:

$$24^h \text{ زمان نجومی میانگین} = \left(24^h - 3^m\, 55^s\text{ر}\, 910\right) UT \qquad (۱۱)$$

رابطه‌ی (۱۰) را می‌توان از ملاحظات زیر نیز به دست آورد. در لحظه‌ی ویژه‌ای خورشید میانگین و اعتدال بهاری میانگین بر هم منطبق‌اند و پس از یک سال اعتدالی دوباره به هم می‌رسند. در این بازه‌ی زمانی، زمین ۳٦۵٫۲٤۲۲ بار حول محورش نسبت به خورشید میانگین و یک بار بیشتر نسبت به اعتدال بهاری میانگین چرخیده است. از این رو:

(۱۲) روز نجومی میانگین ۲۴۲۲ر۳٦٦= روز متوسط خورشیدی ۲۴۲۲ر۳٦۵

که از آن نتیجه می‌شود:

(۱۳) $$24^h\,UT = \left(1+\frac{1}{365\,\text{ر}\,2422}\right)24^h$$ زمان نجومی میانگین

این رابطه با رابطه‌ی (۱۰) یکی است.

برای سهولت تبدیل هر بازه‌ی زمانی UT به معادل آن برحسب زمان نجومی میانگین و برعکس، جدول‌های زیر داده می‌شوند؛ اعداد به سادگی از روابط (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند.

جدول ۱. تبدیل زمان متوسط خورشیدی به زمان نجومی میانگین

زمان متوسط خورشیدی 24^h ≡ زمان نجومی میانگین ($24^h + 3^m\,56^s$ ر 556)

زمان متوسط خورشیدی ۱^h ≡ زمان نجومی میانگین ($1^h + 9^s$ ر 8565)

زمان متوسط خورشیدی ۱^m ≡ زمان نجومی میانگین ($1^m + 0^s$ ر 1643)

زمان متوسط خورشیدی ۱^s ≡ زمان نجومی میانگین ($1^s + 0^s$ ر 0027)

جدول ۲. تبدیل زمان نجومی میانگین به زمان متوسط خورشیدی

زمان نجومی میانگین 24^h ≡ زمان متوسط خورشیدی ($24^h - 3^m 55^s$ ر 91)

زمان نجومی میانگین ۱^h ≡ زمان متوسط خورشیدی $1(1^h - 9^s$ ر $8296($

زمان نجومی میانگین ۱^m ≡ زمان متوسط خورشیدی ($1^m - 0^s$ ر 1638)

زمان نجومی میانگین ۱^s ≡ زمان متوسط خورشیدی ($1^s - 0^s$ ر 0027)

در تقویم‌های نجومی جدول‌های کامل‌تری وجود دارند که مسئله‌ی تبدیل زمان را راحت‌تر می‌کنند.

مثال ۱. می‌خواهیم زمان نجومی میانگین را در $8^h 47^m 38^s$ ر 52 زمان جهانی روز ۲۴ فوریه ۱۹۳۱ پیدا کنیم.

از تقویم‌های نجومی، زمان نجومی گرینویچ، در 0^h زمان جهانی (نصف شب) روز ۲٤ فوریه $10^h11^m37^s$ر 67 است. بازه‌ی زمانی متوسط خورشیدی مورد نظر $8^h47^m38^s$ر 52 است و می‌توان آن را با استفاده از جدول ۱ به روش زیر برحسب زمان نجومی میانگین (ساعت‌ها، دقیقه‌ها، ثانیه‌ها را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم) بیان کرد:

زمان نجومی میانگین			زمان متوسط خورشیدی
$8^h+1^m18^s$ر85	یا	$\equiv 8^h+8\times 9^s$ر8565	8^h
47^h+7^sر72	یا	$\equiv 47^m+47\times 0^s$ر1643	47^m
38^s+0^sر10	یا	$\equiv 38^s+38\times 0^s$ر0027	38^s
0^sر52$+0^s$ر00		$\equiv$	0^sر52

جمع کمیت‌های طرف راست چنین است:

$8^h47^m38^s$ر 52 + 1^m26^sر67 یا $8^h49^m5^s$ر19

بنابراین بازه‌ی $8^h47^m38^s$ر 52 زمان متوسط خورشیدی معادل $8^h49^m5^s$ر19 زمان نجومی میانگین است.

اما در 0^h زمان جهانی زمان نجومی میانگین $10^h11^m37^s$ر 67 است. پس در $8^h47^m38^s$ر 52 زمان جهانی زمان نجومی میانگین $19^h0^m42^s$ر86 خواهد بود.

مثال ۲. زمان نجومی میانگین گرینویچ در روز ۵ فوریه ۱۹۳۱، $18^h31^m52^s$ر38 است. مقدار U T مطلوب است.

از تقویم نجومی، زمان نجومی میانگین در 0^h زمان جهانی در ۵ فوریه $12^h49^m19^s$ر83 است که با کم کردن از $18^h31^m52^s$ر38، بازه‌ی زمانی نجومی مورد نظر به دست می‌آید. بدین ترتیب این بازه $5^h42^m32^s$ر55 زمان نجومی میانگین است. جدول ۲ را به صورت زیر به کار می‌بریم:

زمان متوسط خورشیدی		زمان نجومی میانگین
$=5^h-49^s$ر15	$\equiv 5^h-5\times 9^s$ر8296	5^h
$=42^m-6^s$ر88	$\equiv 42^m-42\times 0^s\,1638$	42^m
$=32^s-0^s$ر09	$\equiv 32^s-32\times 0^s$ر0027	32^s

$=0^s$ر$55-0^s$ر00 $\quad\quad$ 0^sر55

جمع کمیت‌های طرف راست چنین است:

$$5^h41^m36^s \text{ر}43 \quad \text{یا} \quad 5^h42^m32^s \text{ر}55 - 56^s \text{ر}12$$

پس وقتی زمان نجومی میانگین گرینویچ مقدار یاد شده در این مسئله باشد، UT برابر $5^h41^m36^s$ر43 خواهد بود.

این محاسبات به کمک جدول‌های ویژه در تقویم‌های نجومی یاد شده خیلی کوتاهتر می‌شود.

۸۸. تقویم

قبلاً گفتیم که سال اعتدالی واحدی است که شمارش سال‌های رسمی بر اساس آن است. به دلایلی آشکار، سال رسمی شامل تعداد درستی روز متوسط خورشیدی نیست و سال اعتدالی، چنان که دیدیم، ۲۴۲۲ر۳۶۵ روز متوسط خورشیدی است.

در تقویم ژولیانی که به وسیله‌ی ژولیوس قیصر[1] تدوین شد، سال اعتدالی $\frac{1}{4}$۳۶۵ روز در نظر گرفته شد؛ سه سال از چهار سال هر یک برابر ۳۶۵ روز تعیین شدند در صورتی که برای سال چهارم- موسوم به سال کبیسه- ۳۶۶ روز منظور شد. سال کبیسه سالی انتخاب شد که بر ٤ بخش پذیر بود و روز اضافی به ماه فوریه اضافه شد. بدین ترتیب، مطابق قانون پولیوس، همه‌ی سال‌های ۱۹۲۸، ۱۹۳۲، ۱۹۳٦، و مانند آن، سال‌های کبیسه‌اند و در هر کدام، ماه فوریه ۲۹ روز است. اگر طول فرض شده‌ی سال اعتدالی دقیق بود، آن وقت تطابق دقیقی میان دوره‌ی چهار ساله‌ی اعتدالی و دوره‌ی چهار ساله‌ی رسمی وجود داشت.

در سال ۱۵۸۲ (۹٦۱ هـ.ش.)، پاپ گرگوری تقویمی را که اکنون متداول است، معرفی کرد؛ لیکن تا سال ۱۷۵۲ (۱۱۳۱ هـ.ش.) هنوز این تقویم در انگلستان پذیرفته نشده بود. اکنون تقویم گرگوری طوری اصلاح شده است که تصحیح لازم، بر اساس مقدار صحیح سال اعتدالی، به سیستم ژولیانی اعمال شود. بنابر سیستم ژولیانی، سال‌های ۱۷۰۰، ۱۸۰۰، ۱۹۰۰ و ۲۰۰۰ همه کبیسه خواهند بود؛ در تقویم گرگوری فقط سال ۲۰۰۰ سال کبیسه به حساب می‌آید. این قاعده چنان است که، اگر سالی به دو «صفر» منتهی شود کبیسه نیست مگر این که بر ٤۰۰ بخش پذیر باشد. در یک دوره‌ی ٤۰۰ ساله، بنابر تقویم ژولیانی، ۱۰۰ سال کبیسه و بنابر تقویم گرگوری ۳ سال کمتر، یعنی ۹۷، سال کبیسه وجود دارد. بنابراین، طبق تقویم گرگوری:

---

[1] Julius Caesar.–

روز متوسط خورشیدی (۹۷+ ۳۶۵× ۴۰۰)= سال رسمی ۴۰۰

که از آن، سال رسمی میانگین برابر ۳۶۵ر۲۴۲۵ روز متوسط خورشیدی است. این مقدار چنان به مقدار سال اعتدالی نزدیک است که برای قرن‌های متمادی اختلاف قابل ملاحظه‌ای پیش نخواهد آمد.

در این جا نکته‌ای را درباره‌ی سال رسمی بیان می‌کنیم. طبق کاربرد رسمی اولین روز سال، ۱ ژانویه نوشته می‌شود و رویدادی که مثلاً در ساعت ٦ قبل از ظهر ۱ ژانویه در گرینویچ رخ می‌دهد گفته می‌شود در 6^h0^m زمان جهانی روز ۱ ژانویه یا در 1^dر25 ژانویه اتفاق می‌افتد. بدین ترتیب این رویداد ۱ر۲۵ روز بعد از مبدئی که، از نظر نجومی به صورت 0^dر0 ژانویه نوشته می‌شود و در واقع نصف شبی است که ورود روز ۳۱ دسامبر را اعلام می‌کند، به وقوع می‌پیوندد. بنابراین لحظه‌ی 18^h0^m، زمان جهانی، ۳۱ دسامبر ۱۹۳۱ را می‌توان به صورت روز 0^dر75 ژانویه‌ی ۱۹۳۲ نوشت. برای ماه‌های دیگر نیز از روش مشابهی استفاده می‌شود.

۸۹. سال بسلی

طول سال اعتدالی را تعریف کردیم اما لحظه‌ای که، طبق شمارش رسمی، این سال آغاز می‌شود را تعریف نکرده ایم. از نظر نجومی آغاز سال اعتدالی (یا سال خورشیدی) لحظه‌ای تعریف می‌شود که RA خورشید میانگین پنداری- یا طول سماوی خورشید میانگین- دقیقاً برابر 18^h40^m یا °۲۸۰ شود. این لحظه نزدیک آغاز سال رسمی قرار می‌گیرد. سالی که بدین روش تعریف می‌شود معمولاً به افتخار بسل ستاره شناس آلمانی که نخستین بار آن را وارد مسائل نجومی کرد، سال بسلی خوانده می‌شود. بدین ترتیب آغاز سال بسلی ۱۹۷۵ در زمان زیجی 0^dر978 ژانویه‌ی ۱۹۷۵ یعنی 23^h28^m زمان زیجی روز ۳۱ دسامبر ۱۹۷٤، است. با دقت یاد شده در این جا، اختلاف میان زمان زیجی و جهانی کم و بیش قابل چشم پوشی است، زیرا در ۱۹۷۵، $\Delta T=45^s$ر6 از یک هزارم روز کمتر است. آغاز سال بسلی بعدی، آشکارا، با افزایش ۳۶۵ر۲۴۲۲ روز به دست می‌آید. بنابراین، در سال ۱۹۷٦، آغاز سال بسلی در ET1^dر22 ژانویه‌ی ۱۹۷٦ است. اختلاف جزئی ظاهری ناشی از گرد کردن اعداد است.

معمولاً آغاز سال بسلی را به صورت ۱۹۷۵ر۰، ۱۹۷٦ر۰، ۱۹۷۷ر۰ و مانند آن نشان می‌دهند.

در محاسبات و رصدهای مربوط به اجرام آسمانی از سالی که با این روش تعریف می‌شود استفاده می‌کنند. برای مثال، اگر RA و میل ستاره‌ای در یک لحظه‌ی ویژه رصد شوند، این مختصات به اعتدال بهاری و استوای واقعی یا حقیقی در آن لحظه مربوط می‌شوند. مکان ستاره‌ای را می‌توان، با به کار بردن برخی اصول که در فصل ۱۰ توضیح خواهیم داد، نسبت به اعتدال بهاری و استوای میانگین در آغاز سال بسلی به دست آورد. بدین ترتیب برای مثال، تمامی مکان‌های ستاره‌هایی که در

تاریخ‌های مختلف در خلال سال ۱۹۷۵ رصد می‌شوند، می‌توانند به اعتدال بهاری و استوای میانگین ۱۹۷۵٫۰ و با فرآیندی دیگر به اعتدال بهاری استانداردی مانند اعتدال بهاری ۱۹۰۰٫۰ یا ۱۹۵۰٫۰ مربوط شوند.

۹۰. تاریخ ژولیانی

در برخی رصدها (مانند رصد ستاره‌های متغیر) بهتر است لحظه‌ی رصد به صورت تعداد روز و کسری از روز پس از یک مبدأ بنیادی معین بیان شود. مبدأ انتخاب شده ظهر متوسط گرینویچ در اول ژانویه‌ی سال ٤٧١۳ پیش از میلاد است. برای هر تاریخ دلخواه، تعداد روزهایی که از این مبدأ سپری شده است، تاریخ ژولیانی (JD) متناظر با تاریخ مورد نظر را به دست می‌دهد. مثلاً ساعت ۱۲ زمان جهانی اول ژانویه‌ی ۱۹۷۵ به تاریخ ژولیانی به صورت JD ٢٤٤٢٤١٤ نشان داده می‌شود؛ زمان رصدی که مثلاً در 18^hUT روز ۳ ژانویه ۱۹۷۵ (یعنی ٦ ساعت پس از ظهر متوسط گرینویچ ۳ ژانویه) انجام شده است به صورت JD٢٤٤٢٤١٦٫٢٥ نمایش داده می‌شود. لازم به تذکر است که روز ژولیانی در ظهر متوسط گرینویچ شروع می‌شود. در تقویم‌های نجومی، تاریخ ژولیانی برای هر روز سال داده شده است و نیز جدول‌هایی وجود دارند که ستاره شناسان توسط آن‌ها می‌توانند تاریخ ژولیانی را برای هر روز سال پیدا کنند.

۹۱. تعدیل زمان

تعدیل زمان (E) را، همچون فصل ۲ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = HA\Theta - HAMS \qquad (١٤)$$

که در آن $HA\Theta$ زاویه‌ی ساعتی خورشید و HAMS زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین را در یک لحظه و محل دلخواه نشان می‌دهند. همچنین داریم:

$$\text{زمان نجومی} = HA\Theta + RA\Theta = HAMS + RAMS \qquad (١٥)$$

و

$$E = RAMS - RA\Theta \qquad (١٦)$$

مقدار RAMS برای هر زمان جهانی از پیش معلوم است و مقدار $RA\Theta$ نیز برای هر زمان زیجی در دست است، اما رابطه‌ی دقیق میان این دو زمان را نمی‌توان پیشگویی کرد. از این رو، معادله‌ی زمان را نمی‌توان از پیش محاسبه کرد و بنابراین دیگر

در زیجی‌های نجومی داده نمی‌شود، هر چند هنوز در تقویم‌های دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. لیکن، اگر خورشید میانگین را جایگزین خورشید میانگین پنداری کنیم و به جای تعدیل زمان معادله‌ی زیر را بنویسیم:

$$E' = RAFMS - RA\Theta \qquad (۱۷)$$

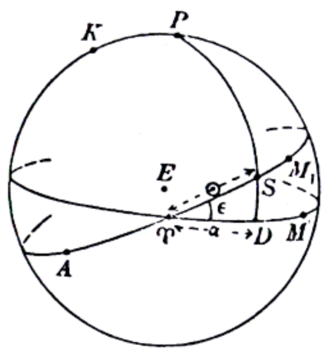
در آن صورت ′E، که می‌تواند تعدیل زمانی زیجی نامیده شود، فقط به اندازه‌ی $۰٫۰۰۲۷\Delta T$ با E اختلاف دارد و می‌توان آن را از پیش محاسبه کرد.

در شکل ۵۷ کره‌ی سماوی را به مرکز زمین رسم کرده ایم. خورشید نسبت به زمین به ظاهر مدار بیضی شکلی را در صفحه‌ی دایرهٔ البروج طی خواهد کرد. اصول و فرمول‌های فصل پنجم برای مدار ظاهری خورشید به دور زمین به کار می‌روند.

فرض کنید Θ طول سماوی خورشید را در لحظه‌ای دلخواه نشان دهد و α بُعد خورشید و l طول سماوی میانگین آن باشد. در این صورت با استفاده از رابطه‌ی (۳) داریم:

$$E' = (\Theta - \alpha) - (\Theta - l) \qquad (۱۸)$$

اگر A در شکل ۵۷ حضیض خورشید را نشان دهد، کمان AS بی‌هنجاری واقعی خورشید، υ، خواهد بود. فرض کنید M_1 مکان یک جسم پنداری باشد که در حضیض بر خورشید واقعی



شکل ۵۷

نطبق است و روی دایرهٔ البروج با حرکت زاویه‌ای میانگین خورشید، ، حرکت می‌کند، در آن صورت کمان AM_1 بی‌هنجاری میانگین M و کمان YM_1 برابر l است. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\Theta - l &= YS - YM_1 \\ &= AS - AM_1\end{aligned}$$

یعنی:

$$\Theta - l = \upsilon 0 - M \tag{۱۹}$$

از این رو:

$$E' = -(\alpha - \Theta) - (\upsilon - M) \tag{۲۰}$$

پس E′ شامل دو قسمت است: (۱) کمیت $(\alpha - \Theta)$ که تقلیل به استوا نام دارد و (۲) کمیت $(\upsilon - M)$ که تعدیل مرکز است و در بخش ۷۳ درباره‌ی آن بحث شد.

نخست کمیت $(\Theta - \alpha)$ را به صورت یک سری بیان می‌کنیم. از مثلث راست گوشه‌ی YSD (PSD دایره‌ی نصف النهار است که از S می‌گذرد) که در آن:

$$YS = \Theta, YD = \alpha, S\hat{Y}D = \varepsilon, S\hat{D}Y = 90^\circ$$

با استفاده از فرمول چهار قسمتی (د) داریم:

$$\cos\alpha\cos\varepsilon = \sin\alpha\cot\Theta$$

یا

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\Theta$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\tan\alpha = \frac{1 - \tan^2\varepsilon/2}{1 + \tan^2\varepsilon/2}\tan\Theta \tag{۲۱}$$

از آن جا که ε در حدود $۲۳\frac{1^\circ}{2}$ است، پس $\tan^2\varepsilon/2$ تقریباً ۱/۲۵ است. به جای $\tan^2\varepsilon/2$، y را قرار می‌دهیم، داریم:

$$\tan\alpha = \frac{1 - y}{1 + y}\tan\Theta \tag{۲۲}$$

که در آن y را کمیت کوچکی می‌گیریم. رابطه‌ی (٢٢) اساساً همان شکل فرمول (٨٢) فصل ٥ را دارد که در معادله‌ی (٨٣) به صورت یک سری نوشته شده است. از این رو، با نوشتن y به جای $-\chi$ و α به جای $\upsilon/2$ و Θ به جای $E/2$ در معادله‌ی (٨٣) داریم:

$$\Theta-\alpha = y\sin 2\Theta - \frac{1}{2}y^2\sin 4\Theta + \frac{1}{3}y^3\sin 6\Theta \qquad (٢٣)$$

در این فرمول، Θ و α برحسب رادیان بیان می‌شوند. تفاضل $(\Theta-\alpha)$ برحسب ثانیه‌ی زمانی چنین است:

$$\Theta-\alpha = \cos ec\,1^s\left[y\sin 2\Theta - \frac{1}{2}y^2\sin 4\Theta\cdots\right]$$

حال $\cos ec\,1^s$=٢٠٦٢٦٥/١٥ و با نشاندن مقدار "٢٣°٢٦'٣٣ به جای زاویه‌ی میل ε در سال ١٩٧٥ خواهیم داشت $y\left(\equiv\tan^2\varepsilon/2\right)$ = ٠ر٠٤٣٠٤٦٨. در این صورت نتیجه می‌شود:

$$\Theta-\alpha = 591^s.94\sin 2\Theta - 12^s.74\sin 4\Theta + 0^s.37\sin 6\Theta \qquad (٢٤)$$

فرمول (٢٤) بخشی از معادله‌ی زمان زیجی که به زاویه‌ی میل دایرهٔ البروج بستگی دارد را به صورت سری شامل طول سماوی واقعی خورشید، Θ، به دست می‌دهد.

بخش دیگر معادله‌ی زمان زیجی وابسته به خروج از مرکز است و آن را تعدیل مرکز می‌نامند.

فرمول (٨٧) فصل پنجم را، با حفظ جمله‌ها تا e^2، می‌نویسیم:

$$\upsilon - M \equiv \Theta - l = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M \qquad (٢٥)$$

با بیان $(\upsilon-M)$ برحسب ثانیه‌ی زمانی و با به کار بردن مقدار e برای ١٩٧٥ر٠ یعنی ٠ر٠١٦٧٢٠، نتیجه می‌شود:

$$\upsilon - M = 459^s.83\sin M + 4^s.81\sin 2M \qquad (٢٦)$$

حال طرف راست رابطه‌ی (٢٣) برحسب Θ، طول سماوی خورشید، است که با استفاده از رابطه‌ی (٢٥) برحسب بی‌هنجاری میانگین M بیان می‌شود:

$$\Theta = l + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M \qquad (٢٧)$$

مقدار Θ را از رابطه‌ی (۲۷) در طرف راست رابطه‌ی (۲۳) قرار می‌دهیم. چنان که پیشتر اشاره کردیم، y حدود ۱/۲۵ و e تقریباً ۱/۶۰ است؛ با توجه به این که y و e کمیت‌های کوچکی هستند که مرتبه‌ی یکسانی دارند، با حفظ جمله‌های تا مرتبه‌ی دوم در مقدار $\Theta-\alpha$، می‌توانیم با دقت مورد نظر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\sin 2\Theta &= \sin\left(2l+4e\sin M\right)\\ &= \sin 2l + 4e\sin M\cos 2l\end{aligned}$$

(چون در رابطه‌ی (۲۳)، $\sin 2\Theta$ در y ضرب می‌شود، لازم است که $\sin 2\Theta$ فقط تا مرتبه‌ی اول بسط داده می‌شود). همین طور، با محدودیت‌های اعمال شده، داریم:

$$\sin 4\Theta = \sin 4l$$

از این رو رابطه‌ی (۲۳)، تا مرتبه‌ی دوم، به صورت زیر در می‌آید:

$$\Theta-\alpha = y\sin 2l + 4ey\sin M\cos 2l - \frac{1}{2}y^2\sin 4l \qquad (۲۸)$$

با ترکیب روابط (۲۸) و (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned}E' = {}& y\sin 2l - 2e\sin M + 4ey\sin M\cos 2l\\ &- \frac{1}{2}y^2\sin 4l - \frac{5}{4}e^2\sin 2M \qquad (۲۹)\end{aligned}$$

با قرار دادن مقادیر عددی y و e خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}E' = {}& 591^{s}.9\sin 2l - 459^{s}.8\sin M + 39^{s}.6\sin M\cos 2l\\ &- 12^{s}.7\sin 4l - 4^{s}.8\sin 2M \qquad (۳۰)\end{aligned}$$

در شکل ۵۷ بی‌هنجاری میانگین، M، کمان AM_1 است که برابر $AY+YM_1$ است، به طوری که:

$$M = AY + l$$

همچنین، اگر ϖ طول حضیض خورشید را نشان دهد، داریم $\varpi = 360^\circ - AY$. از این رو:

$$M = 360 + (l-\varpi) \qquad (۳۱)$$

بدین ترتیب در طرف راست فرمول (۳۰) می‌توانیم به جای M، $(l-\varpi)$ را بنویسیم. مقدار ϖ برای سال ۱۹۷۵٫۰ برابر ۲۸۲°٫۵۰۹۹ است. بنابراین، پس از کمی ساده کردن، خواهیم داشت:

$$E' = -103^s.9 \sin l - 429^s.6 \cos l + 596^s.3 \sin 2l - 2^s.0 \cos 2l$$

$$+4^s.3 \sin 3l + 19^s.3 \cos 3l - 12^s.7 \cos 4l \qquad (۳۲)$$

از این فرمول تعدیل زمان برحسب طول سماوی میانگین خورشید، تا مرتبه‌ی مورد نظر، به دست می‌آید.

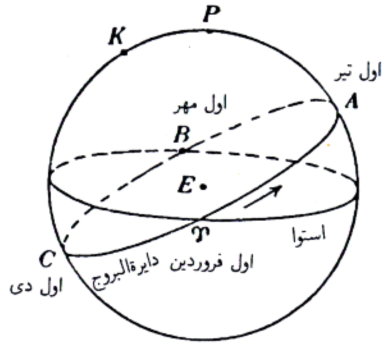
کمیتی که در زیج‌های نجومی فهرست می‌شود E' نیست بلکه عبور زیجی خورشید است. این کمیت، زمان زیجی در لحظه‌ی عبور خورشید از دایره‌ی نصف النهار زیجی است و به سهولت دیده می‌شود که برابر 12^h منهای تعدیل زمان زیجی در آن لحظه است.

۹۲. فصل‌ها

مسیر ظاهری خورشید را در طول سال در نظر بگیرید (شکل ۵۸). زمین E مرکز کره‌ی سماوی است و به نظر می‌رسد که خورشید نسبت به E دایره‌ی عظیمه‌ی CYAB یا دایرهٔ البروج را می‌پیماید. دایرهٔ البروج استوای سماوی را در دو نقطه‌ی Y و B یعنی در اعتدال‌های بهاری و پاییزی (که گاهی به ترتیب اولین نقطه‌ی حمل و اولین نقطه‌ی میزان نامیده می‌شوند) قطع می‌کند. نقطه‌ی P قطب شمال استواست. میل خورشید از °۰ در نقطه‌ی Y (اول فروردین) تا حداکثر ′۲۷ °۲۳ در نقطه‌ی A (اول تیر) که موسوم به انقلاب تابستانی است، افزایش می‌یابد. همین طور، نقطه C که خورشید در آن (اول دی) بزرگترین میل جنوبی خود (′۲۷ °۲۳−) را دارد انقلاب زمستانی نامیده می‌شود.

چهار بخش سال، یا فصل‌ها، که در طی آن‌ها خورشید به طور پیاپی در ربع دایره‌های YA، AB، BC و CY قرار دارد، از نظر نجومی به ترتیب بهار، تابستان، پاییز و زمستان خوانده می‌شوند. از آن جا که این واژه‌ها در محاورات معمولی نسبتاً به طور غیر دقیق به کار برده می‌شوند، ما فقط معنی نجومی آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

مشخصات کلی فصل‌ها در هر محل به مقدار نسبی گرمای دریافتی روز به روز از خورشید بستگی دارد. دو عامل نجومی فصل‌ها عبارت‌اند از (الف) مدتی که خورشید در هر روز بالای افق



شکل ۵۸

است، و (ب) ارتفاع‌های پیوسته‌ای که خورشید در طول این مدت کسب می‌کند. بهتر است ارتفاع یا فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید در ظهر ظاهری به جای (ب) ملاک قرار گیرد.

اگر از شکست نور چشم پوشی کنیم، تعداد ساعاتی که خورشید (یا دقیقاً مرکز خورشید) بالای افق قرار دارد ۲H است که در آن H زاویه‌ی بین 0^h و 12^h است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos H = -\tan\phi\tan\delta \qquad (۳۳)$$

این همان فرمول (۲٤) فصل ۲ است و در آن ϕ عرض جغرافیایی محلی است.

اگر میل δ مثبت باشد، در عرض‌های جغرافیایی شمالی H بین 6^h و 12^h است و بنابراین خورشید بیش از ۱۲ ساعت از ۲٤ ساعت را بالای افق خواهد بود. این وضعیت، بین اول فروردین، یعنی آن گاه که خورشید در Y است، و اول مهر، یعنی هنگامی که خورشید در B است، اتفاق می‌افتد. بدین ترتیب تا آن جا که به (الف) مربوط می‌شود، گرمی روزها از اول فروردین تا ۲۱ تیر که با افزایش δ از 0^h به ′۲۷ °۲۳+ متناظر است، زیاد می‌شود؛ از آن پس، کاهش گرما به دنبال می‌آید. اگر δ منفی باشد، در عرض‌های جغرافیایی شمالی زاویه‌ی ساعتی خورشید در غروب، بنابر رابطه‌ی (۳۳) کمتر از 6^h است و در نتیجه خورشید کمتر از 12^h بالای افق خواهد بود؛ این وضعیت، به دو فصل پاییز و زمستان مربوط می‌شود. هنگامی که خورشید بزرگترین میل جنوبی خود را دارد یعنی در انقلاب زمستانی (اول دی)، تعداد ساعات روشنی روز کمینه است. به سهولت دیده می‌شود که تعداد ساعات روز از اول دی تا اول تیر افزایش یافته، و از اول تیر تا اول دی کاهش می‌یابد.

فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید، z، در ظهر ظاهری هر روز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$z = \phi - \delta \qquad (۳٤)$$

واضح است در هر محلی که در عرض جغرافیایی شمالی بین °۰ و ′۲۷°۲۳ واقع باشد، خورشید دو بار در خلال بهار و تابستان، یعنی بین اول فروردین و اول مهر، در سمت الرأس (یا عملاً چنین) خواهد بود. خورشید در عرض جغرافیایی ′۲۷°۲۳ شمالی، فقط در اول تیر در سمت الرأس است. این مدار شمالی (′۲۷°۲۳ جنوبی) مدار رأس الجدی نام دارد و خورشید در محل‌های میان این مدار و خط استوا، بین اول مهر و اول فروردین دو بار در سمت الرأس خواهد بود. منطقه‌ای از سطح زمین که بین مدارهای رأس السرطان و رأس الجدی محصور است منطقه‌ی حاره است. مدارهای ′۳۳°٦٦ شمالی و ′۳۳°٦٦ جنوبی به ترتیب ′۳۳°٦٦ شمالی را منطقه‌ی معتدله‌ی شمالی و منطقه متناظر آن در نیمکره‌ی جنوبی را منطقه‌ی معتدله‌ی جنوبی می‌نامند.

از رابطه‌ی (۳۳) دیده می‌شود که وقتی ′۳۳°٦٦ = ϕ شمالی و ′۲۷°۲۳+ = δ آن گاه زاویه‌ی ساعتی خورشید در غروب 12^h است؛ بدین معنی که، خورشید در مدار شمالگان در اول تیر تمام ۲٤ ساعت را بالای افق خواهد بود. برای مثال، بنابر رابطه‌ی (۳۳)، خورشید در عرض جغرافیایی °۷۰ در مدتی که میلش بین °۲۰+ ′۲۷°۲۳+ است، یعنی (طبق تقویم نجومی سال ۱۹۳۱)، بین اول خرداد و دوم مرداد پیوسته بالای افق است و مدت باقیمانده از سال را زیر افق خواهد بود.

به طور خلاصه، برای نیم کره‌ی شمالی، این خصوصیات را در مورد فصل‌ها داریم: تعداد ساعات روشنایی روز در طول بهار از ۱۲ ساعت، در اول فروردین، به بیشترین مقدار خود در اول تیر می‌رسد؛ این بیشینه در روزهای خاص در محل‌هایی روی مدار شمالگان یا شمال آن می‌تواند ۲٤ ساعت باشد؛ ارتفاع خورشید هنگام ظهر، در محل‌های شمال مدار رأس السرطان در طول بهار افزایش می‌یابد و در اول تیر به بیشینه‌ی خود می‌رسد؛ این ارتفاع در محل‌های واقع بین استوا و مدار ′۲۷°۲۳ شمالی، در بعضی از روزهای بین اول فروردین و اول تیر به حداکثر °۹۰ می‌رسد.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول تابستان، از بیشینه در اول تیر به ۱۲ ساعت در اول مهر کاهش می‌یابد.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول پاییز، از ۱۲ ساعت در اول مهر به کمینه‌ای در اول دی می‌رسد و در طول این مدت ارتفاع خورشید هنگام ظهر پیوسته کاهش پیدا می‌کند.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول زمستان، از کمینه در اول دی به ۱۲ ساعت در اول فروردین افزایش می‌یابد و ارتفاع خورشید هنگام ظهر در طول این فصل پیوسته زیاد می‌شود.

رابطه‌ی بین فصل‌ها و میل خورشید در نیم کره‌ی جنوبی را می‌توان به سهولت از بحثی که گذشت نتیجه گرفت.

طول هر فصل را (برحسب روز متوسط خورشیدی) می‌توان با توجه به تعدیل مرکز که برای منظور فعلی با استفاده از رابطه‌ی (۲۵) به صورت ساده‌ی زیر نوشته می‌شود به دست آورد:

$$l = \Theta - 2e\sin M$$

یا با به کار بردن رابطه‌ی (۳۱) داریم:

$$l = \Theta - 2e\sin(l - \varpi) \quad (۳۵)$$

چون l برابر تقریباً Θ است، در طرف راست (۳۵) می‌توان l را با Θ جایگزین کرد و در آن صورت:

$$l = \Theta - 2e\sin(\Theta - \varpi) \quad (۳۶)$$

فرض کنید l_1، l_2، l_3 و l_4 به ترتیب طول سماوی میانگین خورشید در آغاز بهار، تابستان، پاییز و زمستان باشند. در آغاز بهار $\Theta = 0$ بنابراین:

$$l_1 = 2e\sin\varpi \quad (۳۷)$$

در آغاز تابستان، Θ برابر ۹۰° یا برحسب رادیان برابر $\pi/2$ است؛ از این رو:

$$l_2 = \frac{\pi}{2} - 2e\cos\varpi \quad (۳۸)$$

همین طور:

$$l_3 = \pi - 2e\sin\varpi \quad (۳۹)$$

$$l_4 = \frac{3\pi}{4} + 2e\cos\varpi \quad (۴۰)$$

فرض کنید t_1، t_2، t_3 و t_4 لحظاتی باشند که در آن‌ها طول سماوی میانگین خورشید l_1، l_2، l_3 و l_4 است، در این صورت:

$$l_2 - l_1 = n(t_2 - t_1) \quad (۴۱)$$

که در آن n حرکت زاویه‌ای میانگین است. اگر $t_2 - t_1$ برحسب روز متوسط خورشیدی بیان شود، $n = 2\pi/T$، که در آن T برابر ۳۶۵٫۲۴۲۲ روز متوسط خورشیدی است. از این رو با استفاده از رابطه‌ی (۴۱)، داریم:

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi}(l_2 - l_1) \text{ روز متوسط خورشیدی} \quad (۴۲)$$

اما $(t_2 - t_1)$ تعداد روزهای متوسط خورشیدی در بهار است و اگر این بازه‌ی زمانی با I_1 نشان داده شود از (۳۷)، (۳۸)، و (٤۲) خواهیم داشت:

$$I_1 = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - 2e(\sin\varpi + \cos\varpi)\right\}$$

یا

$$I_1 = 91\text{ر}31 - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi + \cos\varpi) \qquad (٤۳)$$

همین طور اگر I_2،I_3،I_4 به ترتیب روزهای متوسط خورشیدی در تابستان، پاییز و زمستان باشند، خواهیم داشت:

$$I_2 = 91\text{ر}31 - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi - \cos\varpi) \qquad (٤٤)$$

$$I_3 = 91\text{ر}31 - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi + \cos\varpi) \qquad (٤٥)$$

$$I_4 = 91\text{ر}31 - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi - \cos\varpi) \qquad (٤٦)$$

با قرار دادن ۲٤۲۲ر۳٦٥ = T، ۰۱٦۷۲ر۰ = e، ٥۱۰ر°۲۸۲ = ϖ، برای نیمکره‌ی شمالی داریم:

بهار شامل ۹۲ روز و ۱۹ ساعت است.

تابستان شامل ۹۳ روز و ۱٥ ساعت است.

پاییز شامل ۸۹ روز و ۲۰ ساعت است.

زمستان شامل ۸۹ روز و ۰ ساعت است.

۹۳. زمان عبور خورشید از هر دایره‌ی نصف النهار

این فصل را با بررسی دو مسئله مربوط به زمان به پایان می‌بریم. مثالی از مسئله‌ی نخست چنین است:

می خواهیم UT و زمان استاندارد عبور مرکز خورشید در روز ٤ ژانویه‌ی ۱۹۷۵ از دایره‌ی نصف النهار رصدخانه‌ی دومینیان[۱] را با دقت ثانیه محاسبه کنیم. طول جغرافیایی این محل $8^h13^m40^s.2W$ است.

اطلاعات زیر را از تقویم نجومی ۱۹۷۵ داریم:

ET عبور زیجی خورشید در ٤ ژانویه $12^h04^m45^s.5$ است.

ET عبور زیجی خورشید در ٥ ژانویه $12^h05^m12^s.6$ است.

این دو زمان دقیقاً زمان‌هایی که در آن‌ها زاویه‌ی ساعتی گرینویچ خورشید صفر است، نیستند زیرا این‌ها زمان‌های عبور از دایره‌ی نصف النهار زیجی‌اند، نه گرینویچ. می‌توان نشان داد (به تمرین ۲۳ در پایان این فصل مراجعه شود) که دایره‌ی نصف النهار زیجی به اندازه‌ی ۱ر۰۰۲۷ΔT به شرق دایره‌ی نصف النهار گرینویچ تغییر مکان می‌یابد، و بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$EHA\Theta = GHA\Theta + 1.0027\,\Delta T \qquad (٤٧)$$

حال اگر از تغییر تعدیل زمان در زمان کوتاه بین دو عبور چشم بپوشیم، بی‌درنگ نتیجه می گیریم که:

UT (عبور گرینویچ) = ET (عبور زیجی) + ۰ر۰۰۲۷ΔT

معمولاً از تصحیح کوچک ۰ر۰۰۲۷ΔT که برای ۱۹۷۵ برابر $0^s.12$ است، چشم می‌پوشند و بنابراین داده‌های تقویم نجومی همان زمان‌های جهانی عبور در گرینویچ تلقی می‌شوند. هنگامی که مرکز خورشید روی دایره‌ی نصف النهار ویکتوریاست زاویه‌ی ساعتی گرینویچ خورشید $8^h13^m40^s.2$ یا تقریباً $8^h.23$ است. از دو زمان یاد شده می‌بینیم که برای این که زاویه‌ی ساعتی خورشید از 0^h به 24^h افزایش یابد به $27^s.1$ بیش از 24^h نیاز است. زمان اضافی مربوط به ویکتوریا $27^s.1 \times 8.23/24$ یا $9^s.3$ است، و بنابراین UT عبور خورشیدی در ویکتوریا برابر T است:

$$T = 12^h04^m45^s.5 + 8^h13^m40^s.2 + 9^s.3$$

بدین ترتیب UT عبور در ویکتوریا $20^h18^m35^s$است.

زمان استانداردی که در ویکتوریا نگاه می‌دارند «زمان پاسیفیک» است که متناظر با نصف النهار 8^h غربی است. از این رو زمان استاندارد عبور خورشید در ویکتوریا در ٤ ژانویه $12^h18^m35^s$ (زمان پاسیفیک) است.

۱- Dominion Observatory, Victoria, B.C.

۹٤. زمان عبور ماه از هر دایره‌ی نصف النهار

این مسئله‌ی دوم است و به عنوان مثال، UT و زمان استاندارد عبور ماه را در ویکتوریا برای شب میان ۲٤ و ۲۵ ماه مه ۱۹۷۵ پیدا خواهیم کرد.

اطلاعات مربوط به هر دو عبور زیجی بالایی و پایینی ماه از زیج نجومی به دست می‌آید. مانند بخش پیش می‌توانیم این داده‌ها را زمان‌های جهانی عبور از روی نصف النهار گرینویچ تلقی کنیم. بدین ترتیب معلوم می‌شود که عبور ماه در ۲٤ ماه در ۷۱۷٤ر 23^h رخ داده و عبور پایینی آن ٤۷۱۷ر 12^h دیرتر انجام می‌گیرد. در این مدت زاویه‌ی ساعتی گرینویچ ماه از 0^h به 12^h افزایش می‌یابد. روشن است که عبور در ویکتوریا $12\text{ر}4717/12\times 8^h13^m40^s\text{ر}2$ پس از عبور در گرینویچ اتفاق می‌افتد. این بازه‌ی زمانی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(1+\frac{0\text{ر}4717}{12}\right)\times 8^h\text{ر}2278 \qquad \text{یا} \qquad 8^h\text{ر}5512$$

بنابراین هنگامی که ماه در ویکتوریا عبور می‌کند، UT برابر ($8^h\text{ر}5512+23^h\text{ر}7174$) در ۲٤ مه یا برابر ۲٦۸٦ر 8^h در ۲۵ مه است.

اکنون می‌توانیم نتیجه‌ی دقیق‌تری به دست آوریم. ΔT را برابر $45^s\text{ر}6$ (یا $0^h\text{ر}0127$) در نظر می‌گیریم، ET این عبور در ویکتوریا در ۲۵ مه $8^h\text{ر}2813$ به دست می‌آید. بُعد ظاهری ماه در زیج نجومی به فواصل یک ساعت زمان زیجی جدول بندی شده است. مقدار این بُعد برای زمان حساب شده‌ی عبور $16^h11^m41^s$ است. چون زاویه‌ی ساعتی گرینویچ در این هنگام $8^h13^m40^s$ است، زمان ظاهری نجومی در گرینویچ چنین خواهد بود:

$$\mathsf{GST} = 16^h11^m41^s + 8^h13^m40^s \qquad \text{یا} \qquad 0^h25^m21^s$$

این زمان نجومی گرینویچ به سهولت با استفاده از جدول زمان‌های جهانی و نجومی موجود در تقویم نجومی به UT تبدیل می‌شود. بنابراین UT عبور در ویکتوریا را $8^h16^m09^s$ می‌یابیم. زمان استاندارد عبور $0^h16^m09^s$ (زمان پاسیفیک) روز ۲۵ مه است.

فصل ۸

ابیراهی

۱۰٤. قانون ابیراهی

پدیده‌ی ابیراهی در سال ۱۷۲۸/۱۱۰٦ در نتیجه‌ی یک رشته رصدهای دایره‌ی نصف النهار ستاره‌ی قدر دوم γ اژدها توسط برادلی، که بعدها ستاره شناس سلطتنی شد، کشف شد. رؤمر ستاره شناس دانمارکی در سال ۱٦۷۵/۱۰۵۳ ثابت کرد که نور با سرعتی محدود حرکت می‌کند و رصدهای برادلی با آگاهی از این موضوع تعبیر شد که مکان یک ستاره در آسمان می‌تواند به اندازه‌ای جا به جا شود که به نسبت سرعت مداری زمین به سرعت نور و به مکان ستاره‌ی مورد بررسی بستگی دارد. سرعت متوسط مداری زمین به تقریب ۳۰ کیلومتر بر ثانیه و سرعت نور ۲۹۹۷۹۲ کیلومتر بر ثانیه است؛ در نتیجه نسبت گفته شده کوچک است اما چشم پوشیدنی نیست.

فرض می‌کنیم C در شکل ۷۱ نشانگر مرکز عدسی شیئ یک تلسکوپ و E چشمی آن در لحظه‌ی رسیدن پرتوی از ستاره‌ی X به C باشد. EF موازی جهت حرکت زمین به دور خورشید در همین لحظه است. اگر τ زمان لازم برای عبور این پرتو از تلسکوپ باشد، زمین در این بازه‌ی زمانی فاصله EE_1 یا $V\tau$ را که در آن V سرعت زمین است طی می‌کند. سرعت نور را با c نشان می‌دهیم، در این صورت هنگامی که پرتو ستاره به چشمی می‌رسد، زمین در E_1 است و داریم $CE_1=c\tau$. اگر زمین سرعتی نمی‌داشت، جهتی که تلسکوپ به آن نشانه روی می‌شد جهت E_1C که آن را جهت واقعی ستاره تعریف می‌کنیم بود. در واقع، به سبب حرکت زمین، تلسکوپ باید در جهت EC نشانه گرفته شود. متوازی الاضلاع EE_1C_1C را کامل می‌کنیم.

پس E_1C_1 موازی EC و در نتیجه در جهت ظاهری ستاره در لحظه‌ی رصد است. فرض کنید θ و θ_1 به ترتیب نشانگر $C\hat{E}_1F$ و $C_1\hat{E}_1F$ باشند. در این صورت جابه جایی زاویه‌ای $\theta-\theta_1$ را ناشی از ابیراهی می‌دانند. از شکل ۷۱ دیده می‌شود که ابیراهی، جهت واقعی ستاره را به طرف جهت حرکت زمین EF در صفحه‌ی XE_1F جا به جا می‌کند.

در مثلث CE_1C_1 داریم:

$$\frac{\sin CE_1C_1}{\sin CC_1E_1}=\frac{CC_1}{CE_1}$$

اما $CC_1=EE_1=V\tau$ و $CE_1=c\tau$. از این رو نتیجه می‌گیریم:

$$\sin(\theta-\theta_1)=\frac{V}{c}\sin\theta_1 \operatorname{cosec} 1''$$

یا

$$\theta-\theta_1=\kappa\sin\theta_1 \qquad (۱)$$

که در آن

$$\kappa=\frac{V}{c}\operatorname{cosec} 1'' \qquad (۲)$$

بنا به تعریف κ ثابت ابیراهی است؛ مقدار آن از مقادیر V و c قابل محاسبه و تقریباً ۵ر"۲۰ است. تعریف و مقدار κ بعداً با تفصیل بیشتری بررسی خواهد شد. روشن است که $\theta-\theta_1$ از ۵ر"۲۰ بیشتر نمی‌تواند باشد و معادله‌ی (۱) را با دقت کافی می‌توان به صورت زیر نوشت:

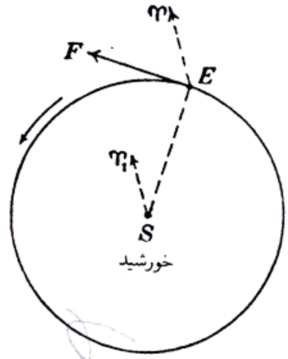
$$\theta-\theta_1=\kappa\sin\theta \qquad (۳)$$

فرمول (۱) یا (۳) را قانون ابیراهی گویند.

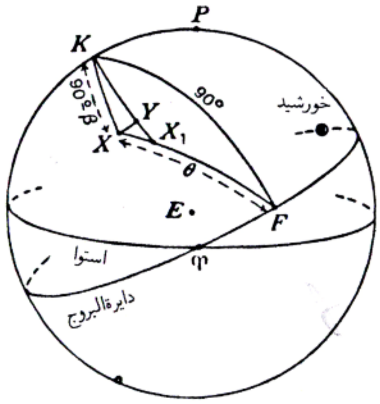
۱۰۵. ابیراهی سالانه در طول و عرض دایرهٔ البروجی

اکنون از خروج از مرکز مدار زمین چشم می‌پوشم و به طور ساده این مدار را دایره‌ای به مرکز خورشید فرض می‌کنیم و سرعت مداری V را ثابت می‌گیریم. اگر E مکان زمین در لحظه‌ی دلخواهی باشد (شکل ۷۲)، جهت حرکت آن در راستای EF عمود بر SE خواهد بود. جهت اعتدال بهاری را EY یا SY_1 می‌گیریم؛ در این صورت $Y\hat{E}S$ طول زمین مرکزی خورشید است که با Θ نشان داده ایم. بدین ترتیب طول سماوی F برابر $(\Theta-90^\circ)$ است. بر این پایه نقطه‌ی F روی دایرهٔ البروج، که حرکت زمین متوجه آن است، 90° عقب‌تر از مکان خورشید روی دایرهٔ البروج است. آشکار است که نقطه‌ی F، در طول یک سال نسبت به زمین به عنوان مرکز کره‌ی سماوی، دایرهٔ البروج را یک دور کامل می‌زند؛ در این حالت ابیراهی را ابیراهی سالانه می‌نامند و جا به جایی‌های ناشی از آن در دوره‌های سالیانه تکرار می‌شوند.

نقطه‌ی F در شکل ۷۳ جهت حرکت زمین را مشخص می‌کند و داریم $YF=\Theta-90^\circ$. نقطه‌ی X مکان واقعی یک ستاره است (این نقطه بنا به تعریف جهتی است که ستاره از خورشید دیده می‌شود). بنابراین از آن جا که جا به جایی ناشی از ابیراهی در صفحه‌ی XEF صورت می‌گیرد، ستاره در امتداد دایره‌ی عظیمه‌ی XF به ظاهر جا به جا شده است و در نقطه‌ی X_1 دیده می‌شود. با



شکل ۷۲



شکل ۷۳

نمادگذاری بخش پیش، $XF=\theta$، $X_1F=\theta_1$ و بنابراین XX_1 از رابطه‌ی (۳) به دست می‌آید:

$$XX_1=\kappa\sin\theta \qquad (٤)$$

دایره‌های عظیمه‌ی KX و KX_1 را که در آن K قطب دایرهٔ البروج است رسم می‌کنیم و دایره‌ی صغیره‌ی XY را موازی دایرهٔ البروج می‌کشیم. اگر λ و β طول و عرض سماوی X، λ_1 و β_1 از آن X_1 باشند، در این صورت $\lambda_1-\lambda=X\hat{K}Y$ و چون $XY=X\hat{K}Y\sin KX$ است پس داریم $XY=(\lambda_1-\lambda)\cos\beta$. همچنین $\beta-\beta_1=X_1Y$ است. با قرار دادن

$$\Delta\beta=\beta_1-\beta \quad و \quad \Delta\lambda=\lambda_1-\lambda$$

به دست می‌آوریم:

$$X_1Y=-\Delta\beta \quad , \quad XY=\Delta\lambda\cos\beta \qquad (٥)$$

در مثلث مسطح بی‌نهایت کوچک XX_1Y زاویه‌ی YXX_1 را با ϕ نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$X_1Y=XX_1\sin\phi \quad و \quad XY=XX_1\cos\phi$$

از این رو از معادله‌ی (٤) و (٥) داریم:

$$\Delta\lambda=\kappa\sin\theta\cos\phi\sec\beta \qquad (٦)$$

$$\Delta\beta=-\kappa\sin\theta\sin\phi \qquad (٧)$$

اکنون در مثلث کروی KXF داریم $KX = 90^\circ - \beta$، $KF = 90^\circ$، $XF = \theta$، $K\hat{X}F = 90^\circ + \phi$ و $X\hat{K}F$ برابر تفاضل طول‌های سماوی F و X است، به طوری که $X\hat{K}F = (\Theta - 90^\circ) - \lambda$.

از فرمول (ب) سینوس داریم:

$$\sin XF \sin KXF = \sin KF \sin XKF$$

و در نتیجه:

$$\sin\theta\cos\phi = -\cos(\Theta - \lambda) \qquad (۸)$$

از فرمول (ج) داریم:

$$\sin XF \cos KXF = \cos KF \sin KX - \sin KF \cos KX \cos XKF$$

و بدین ترتیب:

$$\sin\theta\sin\phi = \sin\beta\sin(\Theta - \lambda) \qquad (۹)$$

از معادله‌های (٦) تا (۹)، فرمول‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\Delta\lambda = -\kappa\sec\beta\cos(\Theta - \lambda) \qquad (۱۰)$$

$$\Delta\beta = -\kappa\sin\beta\sin(\Theta - \lambda) \qquad (۱۱)$$

این فرمول‌ها یعنی (۱۰) و (۱۱) جابه جایی‌های ناشی از ابیراهی سالانه در طول و عرض سماوی را به دست می‌دهند.

۱۰٦. بیضی ابیراهی

از شکل ۷۳ می‌بینیم که جا به جایی ابیراهی از X به X_1 معادل دو جابه جایی است: از X به Y و از Y به X_1. این‌ها را به ترتیب با x و y نشان می‌دهیم. آن گاه داریم:

$$x = \Delta\lambda\cos\beta = -\kappa\cos(\Theta - \lambda) \qquad (۱۲)$$

$$y = -\Delta\beta = \kappa\sin\beta\sin(\Theta - \lambda) \qquad (۱۳)$$

که با حذف $(\Theta-\lambda)$ از آن‌ها، معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2}{\kappa^2}+\frac{y^2}{\kappa^2\sin^2\beta}=1 \qquad (۱٤)$$

این معادله‌ی یک بیضی است موسوم به بیضی ابیراهی. ستاره در طی یک سال به ظاهر این منحنی را روی کره‌ی سماوی می‌پیماید، به گونه‌ای که مرکز بیضی مکان واقعی ستاره است. نیم محور بزرگ که موازی دایرهٔ البروج است، برابر κ و بنابراین برای همه‌ی ستاره‌ها ثابت است. نیم محور کوچک برابر $\kappa\sin\beta$ و عمود بر نیم محور بزرگ است. جا به جایی ابیراهی به ازای $x=\pm\kappa$، یعنی با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) به ازای $\Theta-\lambda$ برابر با °۰ یا °۱۸۰، بیشترین مقدار را دارد. بدین ترتیب به فرض این که مقدار λ را برای ستاره‌ی خاصی بدانیم می‌توانیم دو مقدار Θ (طول زمین مرکزی خورشید) مربوط به بیشترین جابه جایی را به دست آوریم و بنابراین می‌توانیم تاریخ‌هایی را که این اتفاق رخ می‌دهد از زیج نجومی استخراج کنیم. بدین ترتیب برای $\lambda=0^\circ$، جابه جایی ابیراهی وقتی $\Theta=0^\circ$ یا $\Theta=180^\circ$ باشد، یعنی در اعتدال بهاری یا پاییزی بیشترین مقدار را خواهد داشت.

بیضی ابیراهی برای یک ستاره واقع بر دایرهٔ البروج ($\beta=0^\circ$)، به خطی راست (جزئی از دایرهٔ البروج) تبدیل می‌شود و برای ستاره‌ای در قطب دایرهٔ البروج، به صورت دایره در می‌آید.

۱۰۷. ابیراهی در بُعد و میل

مانند قبل، X را مکان واقعی ستاره و X_1 را مکان ظاهری آن در نظر می‌گیریم (شکل ۷٤). این بار α و δ بُعد و میل X و α_1 و δ_1 از آن X_1 هستند. دایره‌ی صغیره‌ی XY را موازی استوا رسم می‌کنیم. آن گاه داریم:

$$XY = X\hat{P}Y\sin PX \qquad و \qquad X\hat{P}Y=\alpha_1-\alpha$$

جاگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\Delta\delta=\delta_1-\delta \quad , \quad \Delta\alpha=\alpha_1-\alpha$$

در این صورت داریم: س

$$\Delta\alpha = XY\operatorname{cosec} PX = XY\sec\delta$$

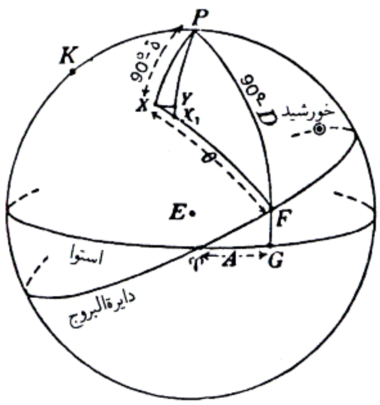
از روی شکل $X_1Y=-\Delta\delta$ را به دست می‌آوریم. $Y\hat{X}X_1$ را هم با ψ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$X_1Y = XX_1 \sin\psi \quad , \quad XY = XX_1 \cos\psi$$

از آن جا که در نمادگذاری بخش ١٠٤، $XX_1 \equiv \theta - \theta_1$ است، با استفاده از رابطه‌ی (٣) می‌نویسیم:

$$\Delta\alpha = \kappa \sin\theta \cos\psi \sec\delta \qquad (١٥)$$

$$\Delta\delta = -\kappa \sin\theta \sin\psi \qquad (١٦)$$



شکل ٧٤

بُعد و میل نقطه‌ی F (روی دایرهٔ البروج که حرکت زمین به طرف آن صورت می‌گیرد) را با A و D نشان می‌دهیم. در مثلث کروی PXF: $P \quad = 90^\circ - \delta$، $PF = 90^\circ - D$، $X\hat{P}F = A - \alpha$، $XF = \theta$، و $P\hat{X}F = 90^\circ + \psi$ است.

با استفاده از فرمول (ب) داریم:

$$\sin XF \sin PXF = \sin PF \sin XPF$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\sin\theta \cos\psi = \cos D \sin(A - \alpha) \qquad (١٧)$$

از فرمول (ج) داریم:

$$\sin XF \cos PXF = \cos PF \sin PX - \sin PF \cos PX \cos XPF$$

که از آن داریم:

$$-\sin\theta\sin\psi=\sin D\cos\delta-\cos D\sin\delta\cos(A-\alpha) \tag{۱۸}$$

بدین ترتیب از معادلات (۱۵) تا (۱۸) نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta\alpha=\kappa\sec\delta\cos D\sin(A-\alpha) \tag{۱۹}$$

$$\Delta\delta=\kappa\sin D\cos\delta-\kappa\cos D\sin\delta\cos(A-\alpha) \tag{۲۰}$$

اکنون مثلث FYG که در آن PFG نصف النهار F است را در نظر می‌گیریم داریم:

$YF=\Theta-90^\circ$، $FYG=\varepsilon$ (زاویه‌ی میل دایرهٔ البروج)، YG = A، FG = D و $F\hat{G}Y=90^\circ$. با استفاده از فرمول‌های (الف)، (ب)، و (ج) نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\Theta=\cos A\cos D\\ -\cos\Theta\sin\varepsilon=\sin D\\ -\cos\Theta\cos\varepsilon=\sin A\cos D\end{array}\right\} \tag{۲۱}$$

اینک از رابطه‌ی (۱۹) داریم:

$$\Delta\alpha=\kappa\sec\delta\left[\cos\alpha\sin A\cos D-\sin\alpha\cos A\cos D\right]$$

به طوری که با به کار بردن رابطه‌ی (۲۱) می‌یابیم:

$$\Delta\alpha\equiv\alpha_1-\alpha=-\kappa\sec\delta\left[\cos\alpha\cos\Theta\cos\varepsilon+\sin\alpha\sin\Theta\right] \tag{۲۲}$$

همین طور از رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta\delta\equiv\delta_1-\delta=-\kappa\cos\Theta\cos\varepsilon(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)-\kappa\cos\alpha\sin\delta\sin\Theta \tag{۲۳}$$

چون κ برحسب ثانیه‌ی قوسی بیان می‌شود، فرمول $\Delta\alpha$ یا $(\alpha_1-\alpha)$ مقدار این کمیت را هم برحسب ثانیه‌ی قوسی به دست می‌دهد. البته معمول آن است که بُعد به مقیاس زمان بیان شود و بنابراین طرف راست رابطه‌ی (۲۲) بر ۱۵ تقسیم شود. جاگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned} &C = -\kappa \cos\varepsilon \cos\Theta, && D = -\kappa \sin\Theta \\ &c = \frac{1}{15}\cos\alpha \sec\delta, && c' = \tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta \\ &d = \frac{1}{15}\sin\alpha \sec\delta, && d' = \cos\alpha \sin\delta \end{aligned}\right\} \qquad (٢٤)$$

آن گاه از (۲۲)، (۲۳) و (٢٤) داریم:

$$\alpha_1 = \alpha + Cc + Dd \qquad (٢٥)$$

$$\delta_1 = \delta + Cc' + Dd' \qquad (٢٦)$$

در این معادلات، C و D به طول سماوی خورشید و در نتیجه به زمانی که از سال که به آن راجع می‌شوند بستگی دارند؛ مقادیر C و D که به اعداد بسلی روز موسوم‌اند، به تندی تغییر می‌کنند و بنابراین برای هر روز از سال در زیج‌ها جدول بندی می‌شوند. کمیات c، c′، d و d′ تنها به مختصات ستاره و زاویه‌ی میل دایرهٔ البروج بستگی دارند و بنابراین می‌توانند یک بار برای همیشه محاسبه شوند.

باید توجه داشت که رابطه‌های (٢٥) و (٢٦) تنها اثر ابیراهی بر مختصات ستاره را به دست می‌دهند.

روشی دیگر برای ساده کردن محاسبات به ترتیب زیر است. جاگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$h\cos H = -\kappa \sin\Theta \quad ; \quad h\sin H = -\kappa \cos\varepsilon \cos\Theta$$

$$i = -\kappa \sin\varepsilon \cos\Theta$$

آن گاه اگر α_1 , α در مقیاس زمان بیان شوند، معادلات (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{15} h \sin(H+\alpha) \sec\delta \qquad (٢٧)$$

$$\delta_1 = \delta + i\cos\delta + h\cos(H+\alpha)\sin\delta \qquad (٢٨)$$

مقادیر H، h و I اعداد مستقل روز نیز برای هر روز سال در زیج‌ها جدول بندی می‌شوند. در بیشتر موارد به کار بردن این‌ها ساده‌تر از اعداد بسلی روز است.

۱۰۸. حرکت بیضی زمین و ابیراهی

تاکنون فرض بر این بود که زمین با سرعت ثابت در مداری دایره‌ای حرکت می‌کند. اینک مسئله را از دید کلی بررسی می‌کنیم. در بخش ٦٦ نشان داده شد که سرعت در امتداد ET (مماس در E) در یک مدار بیضوی (شکل ۷۵) معادل است با سرعت ثابت h/p در امتداد EF، عمود بر شعاع حامل SE، به انضمام سرعت ثابت eh/p در امتداد Ef عمود بر محور بزرگ AB.

بر پایه‌ی نمادگذاری فصل ۵ داریم $h^2=n^2a^3p$ و $p=a(1-e^2)$؛ از این رو اگر بنویسیم $n=2\pi/T$ که در آن T دوره‌ی گردش در مدار است خواهیم داشت:

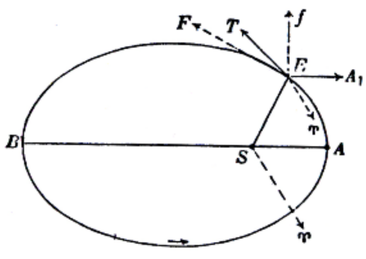
$$\frac{h}{p}=\frac{2\pi a}{T(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{۲۹}$$

جا به جایی کل ناشی از ابیراهی در مکان یک ستاره را در هر مختصی می‌توان مجموع دو جابه جایی دانست: یکی جابه جایی ناشی از سرعت h/p عمود بر شعاع حامل و دیگری جا به جایی ناشی از سرعت ثابت eh/p عمود بر محور بزرگ. این جا به جایی‌ها را به نوبت بررسی می‌کنیم.

چون EF عمود بر SE است، طول زمین مرکزی F برابر است با طول واقعی زمین مرکزی خورشید منهای 90° (یا $90^\circ-\Theta$). بدین ترتیب با همان شرایط هندسی که در شکل ۷۳ نمایش داده شده روبه رو هستیم. جابه جایی‌های مربوط در طول و عرض سماوی را در نظر می‌گیریم. اگر این جا به جایی‌ها با $\Delta\lambda_1$ و $\Delta\beta_1$ نشان داده شوند، مقادیر آن‌ها مستقیماً از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند، به طوری که:

$$\Delta\lambda_1=-\kappa\sec\beta\cos(\Theta-\lambda) \tag{۳۰}$$

$$\Delta\beta_1=-\kappa\sin\beta\sin(\Theta-\lambda) \tag{۳۱}$$



شکل ۷۵

که در آن‌ها κ (برحسب ثانیه‌ی قوسی) با استفاده از روش فرمول (۲) چنین تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{h}{p}\frac{\cos ec\, 1''}{c}$$

یا، با استفاده از رابطه‌ی (۲۹) داریم:

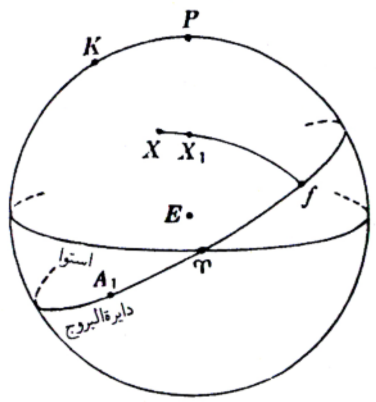
$$\kappa = \frac{2\pi\, a \cos ec\, 1''}{cT\,(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (۳۲)$$

این تعریف دقیق ثابت ابیراهی κ است.

اکنون جابه جایی‌های ابیراهی $\Delta\lambda_2$ و $\Delta\beta_2$ را که از سرعت ثابت eh/p عمود بر محور بزرگ ناشی می‌شوند، بررسی می‌کنیم، فرض می‌کنیم SY در شکل ۷۵ جهت اعتدال بهاری باشد؛ پس $Y\hat{S}A$ برابر ϖ، طول سماوی حضیض است. EA_1 را موازی SA رسم می‌کنیم؛ پس طول زمین مرکزی A_1 برابر ϖ است. همچنین Ef عمود بر EA_1 و بنابراین طول زمین مرکزی f برابر ϖ + °۹۰ است. در شکل ۷۳، که YF برابر °۹۰ − Θ، جابه جایی‌های ابیراهی $\Delta\lambda_1$ و $\Delta\beta_1$ مربوط به سرعت h/p را به دست آوردیم. اینک از شکل ۷٦، که در آن Yf برابر °۹۰ + ϖ به جای °۹۰ − Θ، یعنی، ϖ+ °۱۸۰ به جای Θ و با نوشتن eh/p به جای h/p یا $e\kappa$ به جای κ، به دست آورد. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که:

$$\Delta\lambda_2 = +e\kappa \sec\beta \cos(\varpi - \lambda) \qquad (۳۳)$$

$$\Delta\beta_2 = +e\kappa \sin\beta \sin(\varpi - \lambda) \qquad (۳٤)$$



شکل ۷۶

از این رو جابه جایی‌های ابیراهی کل حاصل از حرکت زمین در مدار بیضوی خود از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\Delta\lambda \equiv \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = -\kappa \sec\beta \cos(\Theta - \lambda) + e\kappa \sec\beta \cos(\varpi - \lambda) \qquad (۳۵)$$

$$\Delta\beta \equiv \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 = -\kappa \sin\beta \sin(\Theta - \lambda) + e\kappa \sin\beta \sin(\varpi - \lambda) \qquad (۳۶)$$

توجه داشته باشید که عبارت‌های $\Delta\lambda_2$ و $\Delta\beta_2$، موسوم به جمله‌های E، از طول سماوی خورشید مستقل‌اند و بنابراین برای هر ستاره در تمام سال تغییر نمی‌کنند. چون مقدار خروج از مرکز e تقریباً ۱/۶۰ است، مقدار $e\kappa$ در حدود ۳ر"۰ است. اگر چه کمیت‌های ϖ، e، λ، و β به طور آهسته تغییر می‌کنند، تغییرات در جمله‌های E آن چنان کوچک‌اند که دست کم برای چند صد سال می‌توان آن‌ها را کاملاً ثابت در نظر گرفت.

چون $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda$ است، پس داریم:

$$\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$$

معادله‌ی مشابهی نیز می‌توان برای β نوشت. به جای به کار بردن مقدار $\Delta\lambda_2$ در این معادله، راحت‌تر است که $(\lambda + \Delta\lambda_2)$ را طول سماوی واقعی ستاره بگیریم، همین کار را می‌توان در مورد عرض سماوی واقعی انجام داد.

به همین روش می‌توان اثرات ابیراهی بر مختصات استوایی α و δ را، با در نظر گرفتن بیضی بودن مدار زمین به دست آورد. باز فرض می‌کنیم که جمله‌های E، وابسته به سرعت eh/p عمود بر محور بزرگ، در مختصات واقعی α و δ منظور شوند.

بدین ترتیب فرمول‌های مؤثر که جابه جایی‌های ابیراهی را در مختصات دایرهٔ البروجی و استوایی به دست می‌دهند، عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 = \lambda - \kappa \sec\beta \cos(\Theta - \lambda) \qquad (۳۷)$$

$$\beta_1 = \beta - \kappa \sin\beta \sin(\Theta - \lambda) \qquad (۳۸)$$

$$\alpha_1 = \alpha + Cc + Dd \qquad (۳۹)$$

$$\delta_1 = \delta + Cc' + Dd' \qquad (۴۰)$$

که در آن‌ها C، c، c′، D، d، و d′ با رابطه‌ی (۲۴) تعریف می‌شوند.

۱۰۹. اندازه گیری ثابت ابیراهی

تعیین دقیق κ یک مسئله‌ی عملی است که در وهله‌ی اول نسبتاً ساده و بی‌پیچ و خم می‌نماید. برای کاهش اثر شکست که حتی در بهترین شرایط هم ممکن است با دقت لازم در این بررسی معلوم نباشد، فقط ستاره‌هایی را برای رصد انتخاب می‌کنند که خیلی نزدیک به سمت الرأس به اوج برسند. فرض می‌کنیم δ میل ستاره‌ای باشد که در تاریخی معین اندکی جنوب سمت الرأس به اوج می‌رسد. برای سادگی از آثار حرکت تقدیمی و ناوش که در فصلی دیگر درباره‌ی آن‌ها بحث خواهد شد، چشم می‌پوشیم. میل ظاهری δ_1 که شامل جابه جایی ابیراهی نیز هست از رابطه‌ی (۲۳) به دست می‌آید و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta_1 = \delta + \kappa x \qquad (٤١)$$

که در آن x ضریب κ در طرف راست رابطه‌ی (۲۳) است.

فرض می‌کنیم در شکل ۷۷، ZX′ فاصله‌ی سمت الرأسی رصد شده‌ی ستاره‌ای روی دایره‌ی نصف النهار باشد و XX′ شکست r را نشان دهد. پس داریم ZX = z + r. ولی $PX = 90^\circ - \delta_1$ و $PZ = 90^\circ - \phi$ است که در آن ϕ عرض جغرافیایی است، به طوری که:

$$ZX = \phi - \delta_1 = \phi - \delta - \kappa x$$

از این رو:

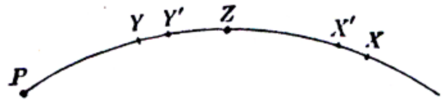
$$z + r = \phi - \delta - \kappa x$$

یا

$$\phi = \delta + z + r + \kappa x \qquad (٤٢)$$

فرض می‌کنیم ستاره‌ی دیگری در V′، که اندکی شمالی‌تر از سمت الرأس است، به اوج برسد و Z فاصله‌ی سمت الرأسی رصد شده‌ی آن و R شکست در جو را نشان دهد. پس داریم ZY = Z+R. همچنین اگر D میل واقعی و D_1 میل ظاهری آن که شامل ابیراهی است باشد، در این صورت با استفاده از رابطه‌ی (۲۳)، داریم:

$$D_1 = D + \kappa X$$



شکل ۷۷

که در آن X ضریب κ در طرف راست رابطه‌ی (۲۳) برای این ستاره است. حال $PY = 90^\circ - D_1$ و $PZ = 90^\circ - \phi$ است. از این رو $ZY = D_1 - \phi$ و داریم:

$$Z + R = D + \kappa X - \phi$$

یا

$$\phi = D - Z - R + \kappa X \tag{۴۳}$$

بنابراین از رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) به دست می‌آوریم:

$$2\phi = (\delta + D) + (z - Z) + (r - R) + \kappa(x + X) \tag{۴۴}$$

در این معادله فرض می‌کنیم که $(\delta + D)$ معلوم باشد و $(z - Z)$ تفاضل فاصله‌های سمت الرأسی اندازه گرفته شده است. چون ستاره‌ها نزدیک سمت الرأس به اوج می‌رسند، وضعیت تلسکوپ در مدت رصد دو ستاره می‌تواند بدون تغییر باقی بماند و چنانچه ستاره‌ها به دقت انتخاب شده باشند بازه‌ی زمانی بین عبورهای آن‌ها حداکثر چند دقیقه خواهد بود. گرچه در این مسئله تلسکوپ دایره‌ی نصف النهاری به کار برده شده است، اما امروزه به جای آن از تلسکوپ عکاسی سمت الرأسی که رد ستاره‌ها را در گذار از دایره‌ی نصف النهار روی یک صفحه‌ی عکاسی ثبت می‌کند، استفاده می‌شود.

اندازه‌ی فاصله بین ردهای دو ستاره‌ی مورد نظر، به طور خیلی دقیق برابر $(z - Z)$ است. تفاضل شکست‌های جوی $(r - R)$ را ممکن است با دقت لازم معلوم فرض کرد. کمیت $(x + X)$ را نیز می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

حدود شش ماه بعد، رصدها تکرار می‌شوند. مانند قبل داریم:

$$2\phi = (\delta + D) + (z_1 - Z_1) + (r_1 - R_1) + \kappa(x_1 + X_1) \tag{۴۵}$$

که در آن شاخص‌های پایین رصدهای جدید را نشان می‌دهند.

برای سادگی فرض می‌کنیم بازه‌ی زمانی طوری باشد که طول سماوی خورشید دقیقاً به اندازه‌ی °۱۸۰ افزایش یابد. با نگاهی به رابطه (۲۳) می‌بینیم که مقادیر x_1 و X_1 اکنون به ترتیب برابرند با x– و X–، به طوری که رابطه‌ی (٤٥) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$2\phi = (\delta + D) + (z_1 - Z_1) + (r_1 - R_1) - \kappa(x + X) \qquad (٤٦)$$

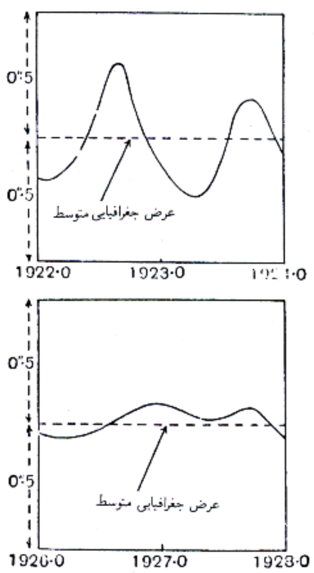
با تفریق رابطه‌های (٤٤) و (٤٦) نتیجه می‌گیریم:

$$2\kappa(x + X) + (z - Z) - (z_1 - Z_1) + (r - R) - (r_1 - R_1) = 0 \qquad (٤٧)$$

که از آن κ به دست می‌آید.

اما وقتی هدف تعیین دقیق κ باشد این روش، یعنی حذف عرض جغرافیایی در رابطه‌های (٤٤) و (٤٦)، قابل توجیه نیست.

کوستنر کشف کرد که محور چرخش زمین نسبت به پوسته‌ی آن



کاملاً ثابت نیست، و از آن جا که عرض جغرافیایی ϕ نسبت به محور چرخش تعریف می‌شود، مقدار آن تغییراتی خفیف به بزرگی چند دهم ثانیه‌ی قوسی خواهد داشت. پس مقادیر ϕ در رابطه‌های (٤٤) و (٤٦) را نباید یکی فرض کرد. در نتیجه تعیین ثابت ابیراهی به طور پیچیده‌ای با مسئله‌ی تغییر عرض جغراف شکل ۷۸ است. ما بحث را طولانی‌تر از این نمی‌کنیم

بلکه فقط می‌پذیریم که گر چه در اصل اندازه گیری ثابت ابیراهی ساده است، ولی در عمل چنین نیست. این ثابت به طور دقیق‌تر از ملاحظات نظری بخش بعد تعیین می‌شود. شکل ۷۸ تغییرات در عرض جغرافیایی گرینویچ را طی سال‌های ۱۹۲۳– ۱۹۲۲ و ۱۹۲۷– ۱۹۲٦ نشان می‌دهد.

۱۱۰. مقدار نظری ثابت ابیراهی

با استفاده از رابطه (۳۲)، κ چنین می‌شود:

$$\kappa = \frac{2\pi\, a \cos ec\, 1''}{cT\,(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (٤٨)$$

که در آن a نیم محور بزرگ مدار زمین، c سرعت نور، T سال نجومی برحسب ثانیه‌ی متوسط خورشیدی، و e خروج از مرکز مدار زمین است. مقادیر پذیرفته شده‌ی این کمیت‌ها عبارت‌اند از:

$$a = 149600000 km$$
$$c = 299792/5 km/s$$
$$T = 32558150 s$$
$$e = 0/01672$$

که از آن‌ها مقدار κ برابر ٤۹٦ر"۲۰ محاسبه می‌شود. مقادیر کمیت‌های نجومی اقتباس شده‌ی بالا آن‌هایی هستند که اتحادیه جهانی اخترشناسی در سال ۱۳٤۲/ ۱۹٦٤ پذیرفته است.[۱] با وجودی که مختصات ظاهری خورشید و سیارات درونی در زیج نجومی بر اساس مقدار قدیمی κ یعنی ٤۷ر"۲۰ مبتنی است، ولی به طور کلی در این منبع از مقادیر بالا استفاده شده است. به هر حال، فرمول‌های لازم برای تبدیل آن‌ها به دستگاه ثابت‌های IAU، در پیوست آخر کتاب آورده می‌شوند.

۱۱۱. ابیراهی شبانه روزی

علاوه بر حرکت سالیانه راصد به دور خورشید، حرکت روزانه‌ی ناشی از چرخش زمین حول محورش نیز وجود دارد. فرض می‌کنیم ρ شعاع زمین و ϕ عرض جغرافیایی یک رصدخانه باشد که در طول یک روز نجومی، به سبب چرخش تنها، محیط مداری کوچک به شعاع $\rho\cos\phi$ را می‌پیماید. چون در یک روز نجومی ۸٦۱٦٤ ثانیه‌ی متوسط خورشیدی هست،

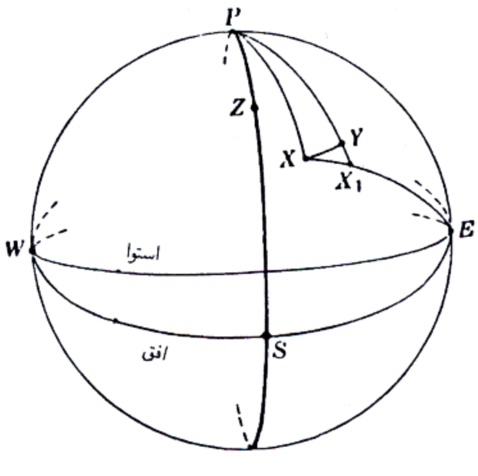
۱- Trans. IAU, vol. XIIB, p.۵۹۴, ۱۹۶۶.

سرعت مربوط به آن برابر $2\pi\rho\cos\phi$ /٨٦١٦٤ کیلومتر بر ثانیه است، که در آن ρ برحسب کیلومتر بیان می‌شود. اگر ρ را ٦٣٧٨ کیلومتر بگیریم، این سرعت برابر $\cos\phi$ ٤٦٥ر٠ کیلومتر بر ثانیه می‌شود. k را برحسب ثانیه‌ی قوسی چنین تعریف می‌کنیم:

$$k = \frac{0/465}{c} \cos\phi \operatorname{cosec} 1'' \qquad (٤٩)$$

که در آن c سرعت نور برحسب کیلومتر بر ثانیه است. بنابراین k ثابت ابیراهی شبانه روزی رصدخانه‌ای واقع در عرض جغرافیایی ϕ است. با قرار دادن مقدار c که قبلاً بیان کردیم، خواهیم داشت. $k = 0''/32\cos\phi$.

اکنون جهت حرکت عمود بر صفحه‌ی دایره‌ی نصف النهار راصد و به طرف شرق است. فرض می‌کنیم X در شکل ٧٩، در لحظه‌ای معین مکان واقعی ستاره‌ای روی کره‌ی سماوی باشد. این



شکل ٧٩

ستاره به سبب ابیراهی شبانه روزی به X_1، در جهت نقطه‌ی شرق E، جا به جا خواهد شد. XE را با θ و X_1E را با θ_1 نشان می‌دهیم. آن گاه بنا به قانون ابیراهی [فرمول (٣)] داریم:

$$XX_1 \equiv \theta - \theta_1 = k\sin\theta \qquad (٥٠)$$

XY را موازی میل رسم می‌کنیم. از آن جا که زاویه‌ی ساعتی از دایره‌ی نصف النهار راصد به طرف غرب اندازه گیری می‌شود، زاویه‌ی ساعتی X_1 کمتر از زاویه‌ی ساعتی X است. به طوری که اگر H و H_1 زاویه‌های ساعتی آن‌ها باشند، داریم $H - H_1 = X\hat{P}Y$. فرض می‌کنیم $\Delta H = H_1 - H$ است اکنون داریم:

$$XY = X\hat{P}Y \sin PX = X\hat{P}Y \cos\delta$$

که در آن δ میل واقعی ستاره است.

از این رو:

$$XY = -\Delta H \cos\delta$$

میل X_1 را با δ_1 نشان می‌دهیم. پس $X_1Y = \delta - \delta_1 = -\Delta\delta$ اگر $Y\hat{X}X_1 = \psi$ باشد، داریم:

$$XY = XX_1 \cos\psi \qquad , \qquad X_1Y = XX_1 \sin\psi$$

یعنی، با به کار بردن رابطه‌ی (۵۰) به دست می‌آوریم:

$$-\Delta\delta = k\sin\theta\sin\psi \qquad , \qquad -\Delta H\cos\delta = k\sin\theta\cos\psi \tag{۵۱}$$

در مثلث کروی PXE، $PX = 90^\circ - \delta$، $PE = 90^\circ$، $XE = \theta$، $P\hat{X}E = 90^\circ + \psi$، و $X\hat{P}E = H - 270^\circ$. از فرمول‌های (ب) و (ج) داریم:

$$\sin XE \sin PXE = \sin XPE \sin PE$$

و

$$\sin XE \cos PXE = \cos PE \sin PX - \sin PE \cos PX \cos XPE$$

این روابط، با قرار دادن مقدار PX و جز آن به صورت زیر در می‌آیند.

$$\sin\theta\cos\psi = \cos H$$

و

$$\sin\theta\sin\psi = -\sin\delta\sin H$$

از این رو با به کار بردن رابطه‌ی (۵۱) و قرار دادن k = ۰"ر۳۲ $\cos\phi$ نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta H \equiv H_1 - H = -0''.32\cos\phi\cos H\sec\delta \tag{۵۲}$$

و

$$\Delta\delta \equiv \delta_1 - \delta = 0''.32\cos\phi\sin H\sin\delta \tag{۵۳}$$

معادله‌های (۵۲) و (۵۳) اثر ابیراهی شبانه روزی بر زاویه‌ی ساعتی و میل یک ستاره را به دست می‌دهند.

هر گاه ستاره روی دایره‌ی نصف النهار باشد، اثر این ابیراهی بر میل بنا به معادله‌ی (۵۳) صفر خواهد بود. جا به جایی‌های ناشی از ابیراهی شبانه روزی چنان کوچک‌اند که معمولاً از آن‌ها چشم می‌پوشند. استثناء در رصد ستاره‌ها با تلسکوپ دایره‌ی نصف النهاری پیش می‌آید. از شکل ۷۹ یا فرمول (۵۲) دیده می‌شود که ابیراهی، ستاره را به طرف شرق مکان واقعی آن جا به جا می‌کند، بنابراین عبور ستاره دیرتر از حالتی که ابیراهی شبانه روزی بی‌تأثیر باشد، رخ می‌دهد. از معادله‌ی (۵۲) مدت درنگ در عبور برابر است با:

$$\frac{0''.32}{15}\cos\phi\sec\delta \text{ ثانیه‌ی زمانی}$$

(زاویه‌ی ساعتی H در زمان عبور 0^h است). برای یک رصدخانه‌ی معین، این عبارت به صورت $C\sec\delta$ است که دقیقاً شکل عبارت ناشی از اثر خطای موازی سازی بر زمان عبور یک ستاره را دارد. اگر t زمان عبوری باشد که عملاً رصد می‌شود، زمان واقعی اگر تنها اثر ابیراهی شبانه روزی منظور شود برابر است با:

$$t - 0^s.021\cos\phi\sec\delta \qquad (٥٤)$$

جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (٥٤) تصحیح یاد شده در بخش ٤٦ است که در فرمول (۹) فصل چهار قرار داده شد.

۱۱۲. تصحیح زمان نور

فرض می‌کنیم t لحظه‌ای باشد که خورشید یا ماه یا یک سیاره یا ستاره‌ی دنباله داری رصد می‌شود. از آن جا که نور سرعتی محدود دارد. لحظه‌ی رصد، مثلاً τ ثانیه بعد از لحظه‌ای است که پرتوی که سرانجام به چشم راصد رسیده آن جسم خاص را ترک کرده است. فرض می‌کنیم که این جسم یک سیاره باشد. مکان رصد شده در زمان t متأثر از ابیراهی سالانه است و پس از به کار بردن فرمول‌های کلی ابیراهی که در بخش‌های قبل به دست آوردیم، مکان سیاره در صورت ساکن بودن زمین به دست می‌آید. این، مکان سیاره در زمان رصد یعنی t نیست بلکه مکان مربوط به لحظه‌ای است که پرتو سیاره را ترک کرده است. به گفته‌ی دیگر، مکان سیاره در زمان $t-\tau$ است. این تصحیح زمان نور و تصحیح ابیراهی سالانه با هم به کار برده می‌شوند، زیرا خاستگاه‌های مشابه دارند. تصحیح اول از سرعت سیاره و تصحیح دوم از سرعت زمین ناشی می‌شود و فقط سرعت نسبی دو جسم با معنی است. وقتی این دو اثر ترکیب شوند، ترکیب آن‌ها تقدیم سیاره‌ای خوانده می‌شود. تصحیح زمان نور خیلی ساده است. فقط به بُعد و میل رصد شده کمیت‌های $\tau\Delta\alpha$ و $\tau\Delta\delta$ را می‌افزاییم که در آن‌ها $\Delta\alpha$ و $\Delta\delta$ آهنگ‌های تغییر مختصات مربوط در یک ثانیه‌اند.